

## Z LOGICKEJ SYNTAXE A SÉMANTIKY (V)

Pavel CMOREJ

9. **Molekulárne výroky.** Zložené výroky jazyka 1. rádu sa tvoria viacerými spôsobmi. V tejto časti nášho výkladu sa budeme zaoberať stavbou výrokov utvorených z atomárnych výrokov pomocou tzv. výrokových spojok. Také výroky sa niekedy nazývajú **molekulárne** (niektorí autori za molekulárne pokladajú aj výroky, v ktorých sa vyskytujú kvantifikátory „pre každé ... platí, že“, „pre niektoré ... platí, že“ a pod.). Výrokové spojky sú z hľadiska logickej gramatiky jednoduché výrazy, ktoré v istom zret'azení s určitým počtom výrokov či výrokových výrazov – ich argumentov – utvárajú nové výroky alebo výrokové výrazy.<sup>1</sup> Skutočnosť, že niektoré spojky prirodzeného jazyka sú viac-slovné výrazy, ktoré logika nahrádza jednoduchými symbolmi, svedčí len o tom, že v logickej syntaxi ich ďalej nerozkladáme a narábame s nimi ako s nerozložiteľnými celkami. Viacslovnými výrokovými spojkami sú napr. výrazy „nie je pravda, že“, „ak ..., tak ---“, „vtedy a len vtedy, keď“ a pod. V jazyku logiky ich nahrádzame jednoduchými symbolmi.

*Jednoduché výrazy* sa v jazykoch logiky členia na vlastné (nesynkategorematické) a nevlastné (synkategorematické). **Vlastné (nesynkategorematické) výrazy** sú jednoduché výrazy, ktoré niečo denotujú alebo signifikujú, napr. vlastné mená individuí a jednoduché predikáty, prípadne nadobúdajú nejaké hodnoty, čo prichádza do úvahy iba pri premenných. **Nevlastné (synkategorematické) výrazy** sú jednoduché výrazy, ktoré 1. nič nesignifikujú ani nedenotujú ani nenadobúdajú nijaké hodnoty, ale 2. v určitom zret'azení s vlastnými výrazmi utvárajú zložené výrazy, ktoré niečo signifikujú, denotujú alebo nadobúdajú nejaké hodnoty a 3. vplývajú na to, čo utvorené výrazy signifikujú či denotujú, resp. na to, aké hodnoty nadobúdajú.

Niektoré konštantné jednoduché výrazy, teda nie premenné, sa niekedy interpretujú ako vlastné – a vtedy treba určiť ich signifikát alebo denotát – a niekedy ako nevlastné. V druhom prípade treba uviesť, aké miesto zaujímajú v zložených výrazoch a ako vplývajú na ich význam. V členení jednoduchých

výrazov na vlastné a nevlastné sa niekedy prejavuje filozofické stanovisko autora (nie však nevyhnutne). Napríklad nominalizmu naklonení autori niekedy pokladajú predikáty za nevlastné výrazy, lebo popierajú existenciu ideálnych entít, ktoré im priradíme ako ich signifikáty a denotáty (vlastnosti, vzťahy a množiny sú ideálne predmety). Príklon k tomu či onomu členeniu jednoduchých výrazov na vlastné a nevlastné môže mať aj iné príčiny, najčastejšie technické alebo didaktické.

K výrazom, ktoré sa niekedy interpretujú ako vlastné a inokedy zasa ako nevlastné, patria najmä **výrokové spojky**, pomocou ktorých sa konštruujú rôzne zložené výroky, resp. výrokové výrazy. Ako sme už uviedli, výroky utvorené aspoň z jednej spojky a nejakých výrokov (či výroku) sa nazývajú **molekulárne**. Budeme sa zaoberať najmä molekulárnymi výrokmí utvorenými pomocou spojok „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „ak ...,tak ---“ a „vtedy a len vtedy, keď“. Prvá z uvedených spojok je **jednoargumentová**, ostatné sú **dvojargumentové**, čo značí, že spojka „nie je pravda, že“ tvorí nový výrok v spojení s jedným a ostatné v spojení s dvoma výrokmí (ktoré sa nazývajú **argumentmi** spojky). Vo výrokovvej logike sa tieto spojky používajú v pevne stanovenom význame určenom pravdivosťnými podmienkami pre výroky, ktoré pomocou nich konštruujeme. Poznamenávame, že niektoré z uvedených spojok majú v prirodzenom jazyku viacej významov. V našom výklade budeme výrokové spojky interpretovať ako nevlastné výrazy (nie však z filozofických, ale z didaktických dôvodov).

Výrok utvorený pomocou spojky „nie je pravda, že“ a ľubovoľného výroku  $A$  sa nazýva **negácia**.<sup>2</sup> Namiesto výrazu „nie je pravda, že“ sa v logike používa jednoduchý symbol, zvyčajne „~“ alebo „¬“, ktorý sa tiež nazýva negáciou (alebo **negátorom**, ak hrozia nedorozumenia spôsobené nerozlišovaním medzi spojkou a výrokom, ktorý pomocou nej formulujeme). Ďalej budeme používať znak „~“ a jeho význam určíme nasledujúcou pravdivosťnou podmienkou.

### Pravdivosťná podmienka pre negáciu

Nech  $A$  je ľubovoľný výrok. Zložený výrok  $\sim A$  je pravdivý (nepravdivý) práve vtedy, keď výrok  $A$  je nepravdivý (pravdivý).

Túto podmienku môžeme v denotačnej terminológii formulovať takto:  $d(\sim A) = 1$  práve vtedy, keď  $d(A) = 0$ , a  $d(\sim A) = 0$  práve vtedy, keď  $d(A) = 1$ , čo sa dá názorne vyjadriť aj tzv. **pravdivosťnou tabuľkou** pre negáciu, ktorú si

čitateľ ľahko zostrojí sám. V uvedenej pravdivostnej podmienke sa určuje význam spojky  $\sim$  ako synkategorematického výrazu, ktorý sám síce nič nenedotuje (ani nesignifikuje), ale vplýva na to, čo signifikuje a denotuje výraz, v ktorom sa vyskytuje. Podobným spôsobom vymedzíme aj význam ostatných spomenutých spojok.

V slovenčine sa negácia často vyjadruje pomocou predpony „ne“ spojenej so slovesom alebo pomocou častice „nie“, po ktorej nasleduje niektorý z tvarov slovesa „byť“ a inými spôsobmi, ktoré nie sú zatiaľ dostatočne preskúmané.<sup>3</sup> Upozorňujeme však čitateľa na to, že výrok utvorený prvými dvoma spôsobmi nemá vždy ten istý význam ako negácia výroku, z ktorého vznikol. Napríklad výrok „Niektorí Slováci nie sú filozofi“ nie je negáciou výroku „Niektorí Slováci sú filozofi“ (veď obidva sú pravdivé!); to isté platí o dvojici výrokov „Niektorí filozofi fajčia“, „Niektorí filozofi nefajčia“. Tam, kde vznikajú pochybnosti, či daný výrok  $B$  (prirodzeného jazyka) má ten istý význam ako negácia výroku  $A$ , odporúčame porovnať  $B$  s výrokom „Nie je pravda, že  $A$ “, lebo v prirodzenom jazyku možno pomocou spojky „nie je pravda, že“ vyjadriť negáciu výroku  $A$  azda najjednoduchšie. Napríklad, ľahko sa možno presvedčiť o tom, že veta „Niektorí filozofi nefajčia“ nie je negáciou výroku „Niektorí filozofi fajčia“, lebo má iný význam ako veta „Nie je pravda, že niektorí filozofi fajčia“ – majú dokonca opačné pravdivostné hodnoty, čo je pri výrokoch s tým istým významom vylúčené.

Na rozdiel od jednoargumentovej spojky „nie je pravda, že“ spojka „a“ je dvojargumentová. Keď ňou spojíme dva výroky  $A$ ,  $B$ , dostaneme výrok „ $A$  a  $B$ “, v ktorom sa konštatuje pravdivosť  $A$  aj  $B$ . Výroková spojka „a“ sa v jazyku logiky zapisuje symbolom „ $\wedge$ “, ktorý sa nazýva **konjunkciou** alebo aj **konjunktorm**, lebo konjunkciou sa volá aj výraz  $A \wedge B$  utvorený z výrokov  $A$ ,  $B$  a spojky „ $\wedge$ “.<sup>4</sup> Význam spojky „ $\wedge$ “ vymedzuje nasledujúca podmienka.

### Pravdivostná podmienka pre konjunkciu

Predpokladajme, že  $A$ ,  $B$  sú nejaké výroky. Zložený výrok  $A \wedge B$  je pravdivý (nepravdivý) práve vtedy, keď obidva čiastkové výroky  $A$ ,  $B$  sú pravdivé (aspoň jeden z výrokov  $A$ ,  $B$  je nepravdivý).

Túto podmienku môžeme formulovať aj takto:  $d(A \wedge B) = 1$  vtedy a len vtedy, keď  $d(A) = d(B) = 1$ ;  $d(A \wedge B) = 0$  práve vtedy, keď  $d(A) = 0$  alebo  $d(B) = 0$  (alebo obidvoje). Pravdivostnú tabuľku konjunkcie si čitateľ ľahko

zostrojí sám. V prirodzenom jazyku touto spojku spájame aj predikáty, individuové mená a iné výrazy. Význam spojky „a“ v týchto kontextoch je trochu iný ako v spojeniach tvaru „ $A$  a  $B$ “, kde  $A$ ,  $B$  sú výroky (niektoré rozdiely medzi jednotlivými významami spojky „a“ sa dajú bližšie určiť v predikátovej logike).

V niektorých kontextoch prirodzeného jazyka spojka „a“ niekedy znamená to isté ako „a potom“ alebo „a súčasne“. Prvý význam má napr. vo vete „Jozef K. napísal list a vložil ho do obálky“. Treba zdôrazniť, že spojka „ $\wedge$ “ klasickej modernej logiky neznamená ani „a potom“ ani „a súčasne“ (vyplýva to napokon aj z pravdivostnej podmienky pre konjunkciu). Z konjunkcie  $A \wedge B$  vyplýva  $B \wedge A$  a naopak, ale z uvedenej vety sotva vyplýva výrok „Jozef K. vložil list do obálky a napísal ho“. O významovej odlišnosti spojky „ $\wedge$ “ od výrazu „a súčasne“ sa možno presvedčiť na príklade výroku „Jozef K. sa narodil r. 1914 a zomrel r. 1941“, ktorého spojku „a“ možno interpretovať ako „ $\wedge$ “, ale sotva ako „a súčasne“.

Význam spojky „ $\wedge$ “ azda najvernejšie vystihuje zvrät „je pravda, že ... a je pravda, že ---“. Pri tomto čítaní sa časový významový odtieň spojky „a“ vo vete „Jozef K. napísal list a vložil ho do obálky“ neutralizuje, o čom svedčí aj skutočnosť, že z výroku „Je pravda, že Jozef K. napísal list a je pravda, že ho vložil do obálky“ vyplýva „Je pravda, že Jozef K. vložil list do obálky a je pravda, že ho napísal“. Pravdivostná hodnota  $A \wedge B$  je určená len pravdivosťmi hodnotami zložiek  $A$ ,  $B$ , pričom nezáleží ani na poradí  $A$ ,  $B$ , ani na tom, či stavy vecí, zodpovedajúce výrokom  $A$ ,  $B$ , sú súčasné. Takisto nie je vôbec dôležité, či medzi výrokmi  $A$ ,  $B$  je nejaká obsahová súvislosť.

Ďalšou dvojjargumentovou spojku je „alebo“, ktorá v spojení s dvoma výrokmi  $A$ ,  $B$  utvára výrok „ $A$  alebo  $B$ “. Táto spojka sa v prirodzenom jazyku používa prinajmenej v dvoch významoch, ktoré treba dôsledne odlišovať: vo vylučujúcom a nevylučujúcom význame. V prvom význame ju používame vtedy, keď chceme vyjadriť tvrdenie, že platí buď  $A$  alebo  $B$ , ale nie jedno aj druhé. Tento význam spojky „alebo“ možno v slo-venčine celkom jednoznačne vyjadriť výrazom „buď ..., alebo ---“. Výrokový výraz „ $A$  alebo  $B$ “ s vylučujúcim „alebo“ ako aj sama spojka „alebo“ (či jej pendant „buď ..., alebo ---“) sa nazýva **vylučujúca disjunkcia**.

Táto disjunkcia je pravdivá práve vtedy, keď presne jedna z jej zložiek  $A$ ,  $B$  je pravdivá a druhá zložka nepravdivá. Veta „Buď prší alebo sneží“ je pravdivá v dvoch prípadoch: 1. keď prší, ale nesneží a 2. keď neprší, ale sneží.

Výrok „ $A$  alebo  $B$ “ s nevyklučujúcou spojkou „alebo“ pripúšťa aj tretiu možnosť – pravdivosť oboch zložiek  $A$ ,  $B$ . Veta „Prší alebo sneží“ je pravdivá aj vtedy, keď prší i sneží. Nevyklučujúce „alebo“ sa v jazyku logiky zapisuje symbolom „ $\vee$ “. Výrok  $A \vee B$  sa nazýva **disjunkciou** (a spojka  $\vee$  disjunkciou aj **disjunktorm**); jej význam úplne a vyčerpávajúco určuje pravdivostná podmienka pre disjunkciu. Ako spojka „a“, aj spojka „alebo“ sa v prirodzenom jazyku používa na spájanie predikátov, individuových mien a iných výrazov. Jej význam v týchto spojeniach sa líši od významu, ktorý spojke  $\vee$  priraduje nasledujúca podmienka.

### Pravdivostná podmienka pre (nevyklučujúcu) disjunkciu

Zložený výrok  $A \vee B$ , kde  $A$ ,  $B$  sú nejaké výroky, je pravdivý (nepravdivý) práve vtedy, keď aspoň jeden z výrokov  $A$ ,  $B$  je pravdivý (keď oboja výroky  $A$ ,  $B$  sú nepravdivé).

Inak povedané,  $d(A \vee B) = 1$  práve vtedy, keď  $d(A) = 1$  alebo  $d(B) = 1$  (prípadne jedno aj druhé) a  $d(A \vee B) = 0$  vtedy a iba vtedy, keď  $d(A) = d(B) = 0$ . Nevyklučujúca disjunkcia sa niekedy nazýva **alternatívou** (sama spojka **alternátorom**)<sup>5</sup>. Vylučujúca disjunkcia sa v systémoch logiky používa podstatne menej ako nevyklučujúca. Do jazyka, v ktorom chýba, ju možno zaviesť definíciou, napr. ak v ňom máme negáciu, konjunkciu a nevyklučujúcu disjunkciu, môžeme ju definovať takto: buď  $A$  alebo  $B$  vtedy a len vtedy, keď  $(A \vee B) \wedge \sim (A \wedge B)$ .

Medzi zložkami  $A$ ,  $B$  vety „ $A$  alebo  $B$ “ býva v prirodzenom jazyku spravidla nejaká obsahová súvislosť, ktorá sa v disjunkcii  $A \vee B$  vôbec nepredpokladá, ale ani nevyklučuje. Význam výroku  $A \vee B$  hádam najvýstižnejšie vyjadruje formulácia „Je pravda, že  $A$  alebo je pravda, že  $B$ “ (s nevyklučujúcim „alebo“), ktorú vnímame ako zmysluplnú aj vtedy, keď medzi jej zložkami  $A$ ,  $B$  nie je nijaký významový súvis.

Azda najproblematickejšou a na adekvátne pochopenie aj najnáročnejšou spojkou jazyka klasickej logiky je implikácia „ak ..., tak ---“. Jej problematickosť väzí najmä v tom, že význam, ktorý má v tejto logike, predstavuje iba jeden z viacerých významov, v ktorých sa používa v prirodzenom jazyku. Navyše to nie je význam, ktorý pri jej používaní v ňom prevláda. Rozličné nedorozumenia i zmätky vyvoláva predovšetkým okolnosť, že významy spojky „ak ..., tak ---“ sa v mnohých kontextoch prekrývajú, ba priam splyývajú, takže

nie je ľahké ich od seba odlíšiť a identifikovať. Jednotlivým významom tejto spojky zodpovedá v logike celý rad patrične odlišených explikátov – exaktne určených významov rôznych implikácií. Sú v nej aj implikácie, ktoré nevznikli explikáciou spojky „ak ..., tak ---“ prirodzeného jazyka, ale na pozadí istých teoretických alebo filozofických úvah. V súčasnej logike nachádzame popri tzv. materiálnej implikácii i kauzálnu a intuicionistickú implikáciu, rôzne striktné a relevantné implikácie, implikácie mnohohodnotových logík a iné.

Našu pozornosť obmedzíme výlučne na materiálnu implikáciu, ktorá sa zo všetkých implikácií používa v modernej logike (a matematike) nepochybne najviac a zjavila sa v nej najskôr, už v čase jej zrodu (v 2. polovici minulého storočia), hoci treba dodať, že ju poznali aj stoici a niektorí stredovekí logici). **Materiálnou implikáciou** sa nazýva jednak symbol „ $\supset$ “ (ale používajú sa aj iné), jednak zložený výraz  $A \supset B$  kde  $A, B$  sú výrokové výrazy. Symbol  $\supset$  sám sa niekedy nazýva aj **implikátorom**. Význam symbolu  $\supset$ , a teda aj výrazov „ak ..., tak ---“, „implikuje“, ktoré používame pri jeho čítaní, jednoznačne určuje nasledujúca pravdivostná podmienka.

### Pravdivostná podmienka pre implikáciu

Výrok  $A \supset B$  zložený z výrokov  $A, B$  a spojky  $\supset$  je pravdivý (nepravdivý) práve vtedy, keď výrok  $A$  je nepravdivý alebo výrok  $B$  je pravdivý (výrok  $A$  je pravdivý a výrok  $B$  nepravdivý).

To znamená, že výrok  $A \supset B$  je pravdivý práve vtedy, keď 1.  $A$  je nepravdivé a nezáleží na tom, akú pravdivostnú hodnotu má  $B$ , alebo 2.  $B$  je pravdivé a nezáleží na tom, či  $A$  je pravdivé alebo nepravdivé. Z uvedených bodov vyplýva, že pravdivostné hodnoty môžu byť v implikácii rozložené buď takto:  $0 \supset 1$ ,  $0 \supset 0$  (bod 1.) alebo takto:  $1 \supset 1$ ,  $0 \supset 1$  (bod 2.). Teda implikácia  $A \supset B$  je pravdivá v troch prípadoch (možnosť  $0 \supset 1$  sa uvádza v oboch bodoch) a nepravdivá iba vtedy, keď jej prvá zložka je pravdivá druhá – nepravdivá. Ak jeden z výrokov  $A, B$  je pravdivý a druhý nepravdivý, implikácia  $A \supset B$  má inú pravdivostnú hodnotu ako  $B \supset A$ . Preto sa prvá zložka implikácie odlišuje od druhej aj terminologicky: výrok  $A$  v implikácii  $A \supset B$  sa nazýva **antecedent** a výrok  $B$  **konzekvent**.

Pravdivostnú podmienku pre materiálnu implikáciu môžeme formulovať aj takto:  $d(A \supset B) = 1$  vtedy a len vtedy, keď  $d(A) = 0$  alebo  $d(B) = 1$  (prípadne jedno aj druhé), a  $d(A \supset B) = 0$  práve vtedy, keď  $d(A) = 1$  a  $d(B) = 0$ . Vymezenie materiálnej implikácie dané touto pravdivostnou podmienkou je v po-

rovnaní s explikáciami ostatných implikácií veľmi jednoduché. Azda aj preto sa systém klasickej logiky s materiálnou implikáciou často uprednostňuje pred systémami, v ktorých sa namiesto materiálnej implikácie používa niektorá z neklasických.

V prirodzenom jazyku spojkou „ak ..., tak ---“, niekedy skrátenu na prosté „ak ..., ---“, vyjadrujeme nielen

1. materiálnu implikáciu, ale aj
2. logické vyplývanie („ak  $A$ , tak  $B$ “ vtedy znamená približne to isté ako „z toho, že  $A$ , vyplýva to, že  $B$ “),
3. kauzálnu implikáciu, pri ktorej „ak  $A$ , tak  $B$ “ znamená „to, že  $A$ , zapríčiňuje to (je príčinou toho), že  $B$ “,
4. časovú následnosť („Ak teraz je apríl, tak o mesiac bude máj“) a
5. iné významy.

Treba pamätať na to, že v 2. – 5. prípade má spojka „ak .., tak ---“ iný význam ako materiálna implikácia. Zmysluplnosť a pravdivosť materiálnej implikácie závisí len od pravdivostných hodnôt jej zložiek, obsahový súvis medzi nimi je irelevantný. Potvrďuje to aj skutočnosť, že  $A \supset B$  možno definovať výrazom  $\sim (A \wedge \sim B)$ , ktorý má pri tých istých pravdivostných hodnotách výrokov  $A$ ,  $B$  tú istú hodnotu ako  $A \supset B$ . Implikácia  $A \supset B$  je v istom zmysle obmenou tvrdenia popierajúceho pravdivosť konjunkcie  $A \wedge \sim B$ , v ktorej sa na obsahovú súvislosť výrokov  $A$ ,  $B$  nekladú nijaké určitejšie nároky. Inak povedané,  $A \supset B$  práve vtedy, keď nenastáva situácia, že platí  $A$  a neplatí  $B$  (kde „platí“ znamená to isté ako „je pravda, že“), všetky ostatné možnosti rozloženia pravdivostných hodnôt na  $A$ ,  $B$  sú prípustné.

Preto sú nasledujúce (a im podobné) výroky

$(5 \leq 2) \supset$  (január má 31 dní),

$(5 \leq 2) \supset$  (Gerlach je nižší ako Kriváň)

nielen zmysluplné, ale dokonca pravdivé. Prípadné pochybnosti o zmysluplnosti a pravdivosti takých viet pramenia v nepochopení významu spojky  $\supset$  a svedčia len o tom, že pochybovač si ho ešte celkom neosvojil. Tento význam možno adekvátnejšie vyjadriť parafrázou „ak je pravda, že ..., tak je pravda, že ---“, v ktorej sa explicitne poukazuje na okolnosť, že vo výroku  $A \supset B$  ide predovšetkým o pravdivosť či nepravdivosť jeho zložiek  $A$ ,  $B$ . Určitejšia významová väzba medzi antecedentom a konzekventom implikácie chýba aj v niektorých výrokoch prirodzeného jazyka. Niet jej napr. vo vete „Ak

Slovensko je maďarská provincia, tak A. Dubček bol americký špión“, ktorou môžeme vyjadriť a zároveň zdôrazniť myšlienku, že Slovensko nie je maďarská provincia, vyplývajúcu z tejto vety a všeobecne známej skutočnosti, že A. Dubček nebol americký špión. Podobné formulácie sú v prirodzenom jazyku celkom bežné. Pravda, primerane ich pochopí iba človek, ktorý vie, že konzekvent je nepravdivý, ba priam absurdný.

Materiálna implikácia sa od bežného „ak ..., tak ---“ líši najmä tým, že jej význam nekladie nijaké podmienky na obsahový súvis medzi antecedentom a konzekventom.<sup>6</sup> Keď však budeme od tohto súvisu abstrahovať a všímať si len pravdivostné hodnoty oboch implikácií a ich zložiek, zistíme, že výroky prirodzeného jazyka tvaru „Ak  $A$ , tak  $B$ “ majú zväčša tú istú pravdivostnú hodnotu ako im zodpovedajúca materiálna implikácia  $A \supset B$ . Odlišnosti sa vynárajú najmä tam, kde chýba obsahový súvis alebo je menej zreteľný – v podobných prípadoch môžu vzniknúť i pochybnosti, či výrok „Ak  $A$ , tak  $B$ “ má vôbec nejakú pravdivostnú hodnotu (najmä vtedy, keď  $A$  je nepravdivé).

Pravdivostnú zhodu medzi vetami tvaru „Ak  $A$ , tak  $B$ “ a zodpovedajúcimi materiálnymi implikáciami možno doložiť mnohými príkladmi. Všimnime si aspoň jeden z nich. Predpokladajme, že Jozef K. býva v Bratislave a skúmajme, akú pravdivostnú hodnotu majú nasledujúce vety.

- Ak Jozef K. býva v Prešove, tak býva vo východoslovenskom kraji
- Ak Jozef K. býva v Trnave, tak býva v západoslovenskom kraji
- Ak Jozef K. býva v Bratislave, tak býva v stredoslovenskom kraji
- Ak Jozef K. býva v Bratislave, tak býva v západoslovenskom kraji

Skúmaním pravdivostných hodnôt týchto viet a ich zložiek ľahko zistíme, že bežná implikácia „Ak  $A$ , tak  $B$ “ je v tomto prípade pravdivá (nepravdivá) pri tých istých hodnotách výrokov  $A$ ,  $B$  ako materiálna implikácia  $A \supset B$ . Treba však dodať, že antecedent každej z týchto štyroch viet obsahovo súvisí s jej konzekventom.

Výroková spojka „vtedy a len vtedy, keď“ ako aj jej ekvivalent „práve vtedy, keď“ sa používa oveľa viac v jazyku matematiky a logiky než v každodennej komunikácii. Nazýva sa **ekvivalenciou** alebo aj **ekvivalentorom** (ale zriedkavejšie), ktorý v logike zapisujeme symbolom  $\equiv$  alebo  $\leftrightarrow$  (budeme používať  $\equiv$ ). **Ekvivalenciou** sa nazýva aj výrokový výraz  $A \equiv B$ , ktorý dostaneme spojením výrokov  $A$ ,  $B$  spojkou  $\equiv$ .



### Pravdivostná podmienka pre ekvivalenciu

Výrok  $A \equiv B$  zložený z výrokov  $A, B$  a spojky  $\equiv$  je pravdivý (nepravdivý) práve vtedy, keď výroky  $A, B$  majú tú istú pravdivostnú hodnotu (keď majú rôzne hodnoty).

Aj túto podmienku možno stanoviť pravdivostnou tabuľkou alebo ju formulovať takto:  $d(A \equiv B) = 1$  práve vtedy, keď  $d(A) = d(B)$ , a  $d(A \equiv B) = 0$  vtedy, keď  $d(A) \neq d(B)$ . Ekvivalencia  $A \equiv B$  vyjadruje tvrdenie o zhode pravdivostných hodnôt jej zložiek  $A, B$ . Jej význam možno hádam najadekvátnejšie vyjadriť parafrázou: je pravda, že  $A$  vtedy a len vtedy, keď je pravda, že  $B$ . Treba zdôrazniť, že výraz „vtedy a len vtedy, keď“ tu vôbec nemá časový význam: nebolo by správne interpretovať ho zvratom „v tom a len v tom čase, keď“. Znamená skôr „v tom a len v tom prípade, keď“. Nemá ho ani jeho ekvivalent „práve vtedy, keď“, ktorý má v prirodzenom jazyku často ten istý význam ako „v tom čase, keď“. V extenzionálnom jazyku logiky a matematiky výraz „práve vtedy, keď“ znamená to isté ako atemporálne interpretovaný zvrät „je pravda, že ... vtedy a len vtedy, keď je pravda, že ---“, teda to isté ako spojka  $\equiv$ .

**10. Extenzionálne a intenzionálne spojky.** Po nenáročnej kombinatorickej úvahe, vychádzajúcej z tabuľkovej charakteristiky spojok, zostrojenej na základe uvedených pravdivostných podmienok, prideme k záveru, že okrem negácie existujú ešte tri jednoargumentové spojky, ktoré s výrokom, denotujúcim pravdivostnú hodnotu uvedenú v prvom stĺpci nasledujúcej tabuľky, tvoria nový výrok, ktorého hodnota je v niektorom z ďalších štyroch stĺpcov (hodnoty negácie sú v treťom stĺpci).

A				
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Prehľad všetkých dvojjargumentových spojok poskytuje nasledujúca tabuľka:



Spojky, ktoré nie sú extenzionálne, sa nazývajú **neextenzionálne** a delia sa na intenzionálne a hyperintenzionálne. **Intenzionálnou výrokovou spojkou** je napr. výraz „je možné, že“ a **hyperintenzionálnou** zvrat „je známe, že“. Rozdielmi medzi intenzionálnymi a hyperintenzionálnymi spojkami sa tu nemôžeme zaoberať, všimnime si však, v čom spočíva neextenzionálnosť výrazov „je možné, že“ a „je známe, že“. Z hľadiska syntaxe prirodzeného jazyka obidve spojky sa nápadne podobajú negácii – v spojení s jedným výrokom tiež utvárajú výrok.<sup>8</sup> Ale od negácie sa líšia tým, že pravdivosťou hodnotou argumentu  $A$  nie je vždy *jednoznačne* určená hodnota výroku „je možné, že  $A$ “, „je známe, že  $A$ “.

Venujme najprv pozornosť spojke „je možné, že“. Výrok „Je možné, že  $A$ “ s pravdivým argumentom  $A$  má síce vždy hodnotu 1 (lebo čo je pravdivé, je aj možné),<sup>9</sup> ale ak  $A$  je nepravdivé, celý výrok môže byť práve tak pravdivý ako nepravdivý. Napríklad, hoci obidva nasledujúce výroky

- (V<sub>1</sub>) Množina {2,3,5} má menej prvkov ako množina {3,5},  
 (V<sub>2</sub>) V. Mečiar je prezident SR

sú nepravdivé, výrok

- (V<sub>3</sub>) Je možné, že V<sub>1</sub>

je nepravdivý (množina {2,3,5} nemôže mať menej prvkov ako množina {3,5}; keby sme z nej nejaké prvky odstránili, stratila by svoju identitu) a výrok

- (V<sub>4</sub>) Je možné, že V<sub>2</sub>

pravdivý, lebo V. Mečiar by mohol byť prezidentom SR. Ako vidíme, hodnota celého výroku „Je možné, že  $A$ “ nie je podmienená iba pravdivosťou hodnotou argumentu  $A$ . Keby to tak bolo, výroky V<sub>3</sub>, V<sub>4</sub> by mali tú istú hodnotu a na určenie ich hodnoty by nám stačila číra znalosť pravdivostnej hodnoty výrokov V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub> (pritom by sme významu týchto výrokov nemuseli ani rozumieť). To znamená, že hodnota výroku „Je možné, že  $A$ “ nie je určená výlučne hodnotou argumentu  $A$ , takže spojka „je možné, že“ nie je extenzionálna.

Obdobná situácia, ale s opačnými pravdivosťnými hodnotami, nastáva pri spojke „je známe, že“. Ak jej argument  $A$  je nepravdivý, „Je známe, že  $A$ “ má hodnotu 0, lebo *nemožno* vedieť, že  $A$ , ak nie je pravda, že  $A$ . A priori totiž

platí implikácia „Ak je známe, že  $A$ , tak  $A$ “, z ktorej vyplýva, že ak nie je pravda, že  $A$ , tak nie je pravda ani to, že je známe, že  $A$ . Preto nemôže byť známe, že  $A$ , keď  $A$  nie je pravdivé.

Ak je však pravda, že  $A$ , tak môžeme, ale nemusíme vedieť, že je to tak. Predpokladajme, že  $V_5$ ,  $V_6$  sú pravdivé výroky, pričom vieme, že  $V_5$ , nie však to, že  $V_6$ , takže výrok

( $V_7$ ) Je známe, že  $V_5$

je pravdivý a výrok

( $V_8$ ) Je známe, že  $V_6$

zasa nepravdivý. Čitateľ si ľahko sformuluje príklad na výrok  $V_7$  s pravdivým argumentom  $V_5$ , o ktorom vieme, že je pravdivý. Keď sa však pokúsi nájsť nejaký príklad na výrok  $V_8$  s pravdivým argumentom  $V_6$ , ktorého hodnota je nám zatiaľ neznáma, čoskoro zistí, že sa usiluje o nemožné, lebo formulácia takého výroku  $V_8$  predpokladá vyčlenenie nejakého výroku  $V_6$ , ktorého pravdivostnú hodnotu zatiaľ nepoznáme a zároveň poznáme (bez tohto poznania nemožno predsa vyčleniť výrok, ktorý môžeme uviesť ako pravdivý argument spojky „je známe, že“ vo výroku  $V_8$ ). Situácia nie je však až taká beznádejná, ako vyzerá na prvý pohľad. Určitý výrok predložiť síce nemôžeme, ale môžeme ponúknuť mnoho dvojíc výrokov, z ktorých jeden – nevedno však ktorý – predstavuje príklad na výrok  $V_8$ . Venujme pozornosť aspoň jednej z nich.

Dnes nikto nevie, či v najbližších voľbách, ktoré sa budú na Slovensku konať po r. 1994 (nie je ešte jasné, či r. 1998 alebo skôr) zvíťazí HZDS. Skalopevné presvedčenie prívržencov hnutia HZDS o víťazstve nie je vedením, ale čírou domnienkou. Z tohto dôvodu ani jeden z výrokov

( $V_9$ ) Je známe, že v najbližších voľbách po r. 1994 na Slovensku zvíťazí HZDS,

( $V_{10}$ ) Je známe, že v najbližších voľbách po r. 1994 na Slovensku nezvíťazí HZDS

nie je pravdivý. Určite je však pravdivý buď argument spojky „je známe, že“ vo výroku  $V_9$ , alebo argument tejto spojky vo výroku  $V_{10}$ . Príkladom na výrok typu

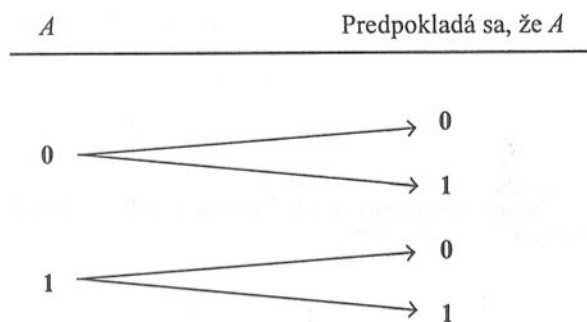
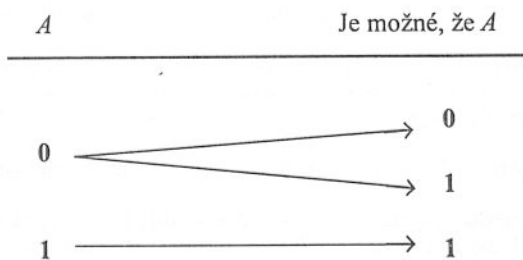
$V_8$  je ten z výrokov  $V_9, V_{10}$ , v ktorom sa za spojku „je známe, že“ vyskytuje pravdivý argument.

Spojky „je možné, že“ a „je známe, že“ nie sú extenzionálne, ale pravdivostná hodnota výrokov tvaru „Je možné, že  $A$ “, „Je známe, že  $A$ “ je jednoznačne určená aspoň (a len) jednou z hodnôt výroku  $A$  (hodnotou 1 v prípade spojky „je možné, že“ a hodnotou 0 pri spojke „je známe, že“). Jestvujú však spojky, pri ktorých i táto polovičná určenosť pravdivostnej hodnoty celého výroku hodnotou jej argumentu chýba. Patria k nim napr. výrazy „predpokladá sa, že“, „verí sa, že“, „očakáva sa, že“ a pod.

Pretože predpokladať možno práve tak to, čo je pravda, ako aj to, čo nie je pravda, výrok „Predpokladá sa, že  $A$ “ môže byť pravdivý jednak vtedy, keď  $A$  je pravdivé, jednak vtedy, keď  $A$  je nepravdivé. Na druhej strane jestvujú výroky (či ich významy), ktoré nik nepredpokladá, a keďže niektoré z nich sú pravdivé, iné nepravdivé, výrok „Predpokladá sa, že  $A$ “ môže byť nepravdivý tak s pravdivým, ako aj s nepravdivým argumentom  $A$ .

Porovnajme teraz tri spojky, reprezentujúce tri skupiny spojok, ktorými sme sa zaoberali: extenzionálnu spojku „nie je pravda, že“, neextenzionálnu spojku „je možné, že“ a neextenzionálnu spojku „predpokladá sa, že“. V nasledujúcich troch diagramoch názorne ukážeme, do akej miery je hodnota celého výroku utvoreného z príslušnej spojky a jej argumentu  $A$  určená pravdivostnou hodnotou  $A$ . Jednoznačnú určenosť hodnoty celého výroku hodnotou argumentu  $A$  znázorníme *jednou* šípkou smerujúcou od hodnoty  $A$  k hodnote celého výroku. Dve šípky smerujúce od hodnoty  $A$  k dvom hodnotám celého výroku naznačujú, že celý výrok môže byť pri danej hodnote  $A$  niekedy pravdivý a niekedy nepravdivý. To znamená, že v tomto prípade hodnota celého výroku nie je *jednoznačne* určená hodnotou argumentu  $A$ , čiže spojka nie je extenzionálna.

$A$	Nie je pravda, že $A$
0	→ 1
1	→ 0



Podobné diagramy možno zostrojiť aj pre viacargumentové spojky, v ktorých šípky smerujú od usporiadaných dvojíc (trojíc, ...,  $n$ -tíc) pravdivostných hodnôt argumentov  $A, B (C, D, \dots)$  k hodnotám celého výroku utvoreného z danej spojky a argumentov  $A, B (C, D, \dots)$ . Ak spojka je extenzionálna, tak od každej usporiadanej  $n$ -tice pravdivostných hodnôt jej argumentov smeruje k hodnote celého výroku iba jedna šípka.

Na záver poznamenávame, že extenzionálne spojky a výrazy „je možné, že“, „je známe, že“, „predpokladá sa, že“ a pod. sa v logickej literatúre často nazývajú **operátormi**.

#### POZNÁMKY

- <sup>1</sup> Výrokovými výrazmi sú jednak výroky, jednak ich formy, ktorými sa budeme zaoberať neskôr.
- <sup>2</sup> Negáciou sa nazýva aj výraz tvaru „Nie je pravda, že  $A$ “, v ktorom  $A$  nie je výrok, ale jeho forma.
- <sup>3</sup> Český výskum v tejto oblasti je oveľa ďalej. Pozri napr. pozoruhodnú prácu E. Hajičovej [2].

<sup>4</sup> Konjunkciou sa nazýva aj výraz, v ktorom  $A$  alebo  $B$  je výroková forma. To isté platí o termínoch označujúcich ostatné spojky.

<sup>5</sup> Slovenská terminológia týkajúca sa logických spojok nie je ešte dostatočne ustálená a jednotná. Vo svojej knižke [1] F. Gahér nazýva alternatívnou vylučujúcou disjunkciou (pozri [1], 59). V našom výklade sa pridrižujeme terminológii predloženej v [3], kde sa alternatíva stotožňuje s nevylučujúcou disjunkciou (pozri [3], 13).

<sup>6</sup> Treba dodať, že nie je ľahké tento súvis zachytiť a bližšie ho určiť. Ide o priam nepolapiteľný fenomén.

<sup>7</sup> O týchto a niektorých iných spojkách píše podrobnejšie F. Gahér vo svojej knižke ([1], 66-82).

<sup>8</sup> V syntaxi mnohých jazykov logiky sa spojky „je možné, že“ a „je známe, že“ zaraďujú do tej istej syntaktickej kategórie ako negácia. Subtílnejšia analýza však ukazuje, že každá z týchto troch spojok patrí do inej kategórie. Na odlíšenie týchto kategórií by sme potrebovali jemnejšie diferencujúci jazyk intenzionálnej logiky.

<sup>9</sup> Možné sa tu chápe tak, že zahŕňa aj to, čo je nevyhnutné. Inak povedané, ak je niečo nevyhnutné, tak je aj možné.

## LITERATÚRA

[1] GAHÉR, F. (1994): *Logika pre každého*. IRIS, Bratislava.

[2] HAJIČOVÁ, E. (1975): *Negace a presuposice ve významové stavbě věty*. Academia, Praha.

[3] *Matematická terminológia* (1984). SPN, Bratislava.