ENTROPIA A MODELOVANIE

Ján PAULOV

ENTROPY AND MODELLING

It is well known that mathematical modelling in social sciences, particularly when concepts originally rooted in natural sciences are used, is, from methodological point of view, a touchy subject since the problem of reductionism can appear in this context. This paper addresses such a subject for its main objective is to discuss how the entropy concept, originally physical one, can generally be used in modelling, especially in the domain of social sciences. The way how this topic is approached in this paper is based on using the Jaynes maximum entropy principle saying that from all probability distributions, which can be used to describe/model the distribution issue analysed and which are compatible with an information available, is to prefer one which results from maximising the Shannon information entropy since only this one is least biased. In such a way the principle turns out to be a statistical inference principle not bound to purely physical domain, having a high degree of generality and avoiding a danger of reductionism. Really, the Jaynes principle, besides physics itself, found a broad application in a non-physical domain. In this paper the application on modelling spatial organisation of society is demonstrated, specifically on the derivation of maximum entropy models of spatial interaction describing the movement of people, commodities, etc. between different places and areas.

1 Úvod

Hoci „entropia" je z hľadiska svojej genézy špeciálno-vedný pojem, majúci svoje domovské právo vo fyzike, nie je to pojem, ktorý by bol filozofii úplne vzdialený, resp. bol pre ňu irelevantný. Ak sa však tento pojem spája s filozofiou, tak je to spravidla v súvislosti s filozofickými implikáciami druhého termodynamického zákona, niekedy označovaného aj ako „entropický", pretože práve entropia v ňom zohráva kľúčovú úlohu. Tento príspevok si však nekladie za cieľ zaoberať sa uvedeným pojmom v tejto jeho tradičnej súvislosti, ale v súvislosti doteraz pomerne málo diskutovanej, v súvislosti, ktorá má skôr bližší vzťah k analytickej filozofii,[1] a to v súvislosti s modelovaním, navyše v súvislosti s modelovaním v spoločenských vedách. Je však vôbec možné spájať tento pôvodne rýdzo prírodovedný pojem so spoločenskými vedami? Nie je to priam bezuzdný redukcionizmus? Tento príspevok si kladie za cieľ ukázať možnosti takého spojenia, spojenia ktorému by nehrozilo nebezpečenstvo redukcionizmu. Naplnenie tohto zámeru však vyžaduje vytvoriť

[1] Pre predstaviteľov a priaznivcov analytickej filozofie môže byť zaujímavé zistenie, že jeden z jej najvýznamnejších predstaviteľov R. Carnap napísal rozsiahlu štúdiu o entropii [3].

ORGANON F 9 (2002), No. 1, 157-175

najskôr isté konceptuálne zázemie, istý kontext; prediskutujeme preto najskôr aspoň v stručnej podobe doterajšie chápanie uvedeného pojmu.

2 Entropia ako vedný koncept

Je málo vedných konceptov, ktoré by sa postupne tak obohacovali, rozširovali a prehlbovali, ktoré by získavali také nové formulácie a interpretácie ako práve entropia. V kontexte tohto príspevku si všimneme jeho tri základné formulácie a interpretácie.

2.1 Entropia ako koncept klasickej (fenomenologickej) termodynamiky

Pojem „entropia" sa vo vede objavil v spojitosti s matematickou formuláciou druhého termodynamického zákona (druhej termodynamickej vety). Tento zákon, sformulovaný v r. 1850 nemeckým fyzikom R. Clausiusom a o rok neskôr britským fyzikom W. Thomsonom (lordom Kelvinom),[2] v Clausiusovej verbálnej formulácii hovorí, že teplo spontánne prechádza z telies teplejších na telesá chladnejšie a nikdy nie naopak ([6], 416). To má za následok, že v izolovanom termodynamickom systéme dôjde postupne k vyrovnaniu teplôt, čo je stav zvaný rovnovážny, keď teplo ako forma energie nie je schopné vykonávať mechanickú prácu. K tomu poznamenajme, že všetky formy energie sa môžu bezo zvyšku premieňať na tepelnú energiu, avšak obrátený proces nie je v plnom rozsahu možný. Brillouin ([2], 7) v tejto súvislosti triedi jednotlivé formy energie do rôznych úrovní, pričom tepelnej prisudzuje najnižšiu. Prechod z vyššej úrovne na nižšiu a napokon na najnižšiu charakterizuje ako proces degradácie energie. Keďže ale samotné teplo je schopné vykonávať mechanickú prácu len pri teplotných rozdieloch, postupné vyrovnávanie teplôt v izolovanom termodynamickom systéme vedie k postupnému znižovaniu účinnosti tepelnej energie vzhľadom na jej schopnosť konať mechanickú prácu, až napokon nastane stav, keď, ako sme už uviedli, nie je možná žiadna mechanická práca. Druhý termodynamický zákon tak využitie energie jasne ohraničuje. „Tento prírodný zákon ukazuje, aká časť energie v našom okolí je úplne neužitočná. Je to energia tepelného pohybu molekúl telies, ktoré sú v rovnovážnom stave. Takéto telesá nemôžu premeniť svoju energiu na mechanický pohyb." ([11], 192)

---

[2] Formulácia druhého termodynamického zákona sa opierala o rozsiahle výskumy týkajúce sa účinnosti tepelných strojov, ktoré v prvej polovici 19. storočia uskutočnil francúzsky bádateľ S. Carnot. Niektorí autori dokonca vyslovujú názor, že tento zákon, aspoň v jeho prvotnej podobe, už vlastne sformuloval S. Carnot.

Verbálnu formuláciu druhého termodynamického zákona doplnil R. Clausius v r. 1865 o matematickú formuláciu spojenú so zavedením novej stavovej funkcie systému – entropie, často označovanej ako S, ktorá má nasledovné vlastnosti ([12], 13): (1) S je jednoznačná stavová funkcia systému; (2) S je aditívna funkcia – entropia zloženého systému sa rovná sume entropii jeho nezávislých častí; (3) pre ľubovoľne malú zmenu v ľubovoľne homogénnom systéme spĺňa S nasledovnú podmienku:

$$(1) \quad dS \geq \frac{dQ}{T},$$

kde dS je totálny diferenciál entropie (vyjadrujúci jej prírastok), dQ je elementárne množstvo tepla, ktoré systém prijal a T je absolútna teplota systému (vyjadrená v Kelvinovej stupnici), pri ktorej systém toto množstvo tepla prijal. Pre izolovaný systém, pri ktorom $dQ = 0$, platí $dS \geq 0$, čo znamená, že v takomto systéme entropia nikdy neklesá; buď zostáva konštantná (ak je proces reverzibilný), alebo narastá (ak je proces ireverzibilný). Narastanie entropie v izolovanom systéme je však spojené s postupným vyrovnávaním teplôt jeho jednotlivých častí; pri úplnom teplotnom vyrovnaní je entropia maximálna. Izolovaný systém tak speje k stavu maximálnej entropie.

Za predpokladu, že náš vesmír je izolovaný systém, boli na základe tejto skutočnosti vyslovené, a to už W. Thomsonom, fyzikálno-filozofické implikácie o tzv. tepelnej smrti vesmíru. Chápanie entropie v zmysle klasickej termodynamiky, hoci potrebné na lepšie porozumenie ďalších súvislostí, nebude však v tomto príspevku predmetom ďalších úvah.

2.2 Entropia ako koncept štatistickej mechaniky (termodynamiky)

Z hľadiska klasickej termodynamiky je entropia makroskopická a deterministická veličina, avšak v súvislosti so vznikom štatistickej mechaniky (termodynamiky) vyvstala požiadavka reformulovať a reinterpretovať tento pojem. Toto úsilie je spojené s menom rakúskeho fyzika L. E. Boltzmanna a amerického fyzika J. W. Gibbsa (sedemdesiate roky 19. storočia).

Štatisticko-mechanický prístup, vychádzajúci zo skúmania systémov pozostávajúcich z veľkého množstva častíc, v správaní ktorých vystupuje do popredia prvok náhody, viedol k formulácii, že entropia je funkciou tzv. štatistickej pravdepodobnosti, označovanej spravidla ako W, definovanej ako počet mikrostavov systému a nazývanej ako váha (makro)stavu.[3] Matematický postup vedúci k uvedenej formulácii je nasledovný ([20], 243):

[3] Pojmy „makrostav" a „mikrostav" budú bližšie identifikované v ďalšej časti tohto príspevku.

Majme dva od seba nezávislé systémy so štatistickými pravdepodobnosťami W_1 a W_2 a entropiami S_1 a S_2. Nech S je entropia systému, ktorý vznikne spojením dvoch uvedených systémov. V súlade s tvrdením, že entropia je funkciou štatistickej pravdepodobnosti, možno zapisať: $S_1 = f(W_1)$ a $S_2 = f(W_2)$. V dôsledku toho, že nový systém vzniká spojením dvoch od seba nezávislých systémov, však bude jeho entropia funkciou súčinu uvedených štatických pravdepodobností, t. j. $S = f(W_1 . W_2)$. Keďže ale platí, že entropia zloženého systému je súčtom entropii jeho nezávislých častí (pozri **2.1**), čiže $S = S_1+S_2$, možno ďalej písať $f(W_1 . W_2) = f(W_1)+f(W_2)$. Postupným parciálnym derivovaním uvedeného vzťahu podľa W_1 a W_2 dospejeme k diferenciálnej rovnici $f'(W)+Wf''(W) = 0$, kde $W = W_1.W_2$. Jej riešenie vedie k vzťahu $S = k\ln W + \text{const}$, pričom ale aditívnu konštantu možno zahrnúť do W, takže napokon

(2) $S = k\ln W$,

kde k je Boltzmannova konštanta (molekulová konštanta ideálneho plynu), ln je prirodzený logaritmus (t. j. logaritmus so základom e) a W, ako je už známe, je štatistická pravdepodobnosť. Uveďme, že fyzikálny rozmer vzťahu (2) udáva k, pretože W je bezrozmerná veličina udávajúca, ako sme už uviedli, počet mikrostavov systému a zároveň interpretovaná ako váha (makro)stavu.

„Makrostav" a „mikrostav" sú základnými pojmami pri štatisticko-mechanickom opise systémov [9]. Rozdiel medzi nimi je daný rozdielom rozlišovacích úrovní; pri mikrostave ide o detailnejšiu rozlišovaciu úroveň. Kým pri makrostave stačí poznať iba počet častíc v jednotlivých energetických hladinách (stavoch), t. j. rozdelenie $\{m_i\}$, pri mikrostave je potrebné poznať už aj „mená" častíc, t. j. aj to, ktoré konkrétne častice sa v daných energetických hladinách nachádzajú. Ak (pre jednoduchosť) pôjde napr. iba o dve hladiny, t. j. i = 1 a i = 2, pričom v prvej budú dve častice, kým v druhej tri, môžeme písať $m_1 = 2$, $m_2 = 3$; makrostav systému bude potom zadaný rozdelením {2, 3}. Pri zadaní mikrostavu je však navyše potrebné uviesť, ktoré konkrétne častice sú v hladine i = 1 a i = 2; napr. mikrostav {A, B; C, D, E} znamená, že v hladine i = 1 sú častice A, B a v hladine i = 2 častice C, D, E. Z takéhoto chápania vyplýva, že mikrostav je tiež rozdelenie, ale také, pri ktorom je navyše potrebné poznať, ktoré konkrétne častice sú v daných energetických hladinách. Jednotlivé častice sledovaného systému však môžu meniť svoje energetické hladiny, môžu sa preskupovať z jednej hladiny do druhej. Tak napr. mikrostav {A, C; B, D, E} znamená, že častice B a C si vymenili svoje miesta; častica B sa presunula z hladiny i = 1 do i = 2, kým častica C z hladiny i = 2 do hladiny i = 1. V oboch prípadoch však v hladine i = 1 zostali dve častice a v hladine i = 2 tri častice čiže, makrostav systému {2, 3} zostal zachovaný, hoci jeho mikrostav sa zmenil. Z toho ďalej vyplýva, že jednému a tomu istému makrostavu systému môže zodpovedať viacero mikrostavov systému. Štatistická mechanika vychádza pritom z fundamentálneho predpokladu, že v izolovanom termodynamickom systéme pozostávajúcom z tzv. ideálneho plynu (t. j. plynu, ktorého častice neinteragujú, resp. ich interakčná energia je zanedbateľná) sú všetky mikrostavy systému rovnako pravdepodobné. Ich počet, t. j. W, závisí od postulovaných vlastností častíc. Veličinu W možno stanoviť pre každý makrostav, t. j. pre každé rozdelenie $\{m_i\}$. Makrostav systému sa však môže aj meniť. Izolovaný termodynamický systém speje napokon k takému makrostavu, ktorý sa dá realizovať najväčším počtom spôsobov, t.j. k takému makrostavu, ktorý sa vyznačuje najväčším počtom mikrostavov systému čiže najväčšou hodnotou W. Tento makrostav je najpravdepodobnejší, pretože jeho váha W je najväčšia. Keďže ale S je funkciou W, bude za takéhoto makrostavu maximalizovaná aj hodnota S, t. j. entropia systému. Tendencia izolovaného termodynamického systému spieť k stavu maximálnej entropie je tak v štatistickej mechanike nielen konštatovaná, ale na rozdiel od klasickej (fenomenologickej) termodynamiky aj vysvetľovaná, a to na hlbšej, mikroskopickej úrovni. Ide teda o spontánny proces, v ktorom sa napokon „presadí" makrostav, ktorý má najväčšiu štatistickú váhu, W. To, čo klasická termodynamika konštatuje na makroúrovni ako vyrovnávanie teplôt v izolovanom termodynamickom systéme, štatistická mechanika (termodynamika) vysvetľuje ako dôsledok istého hlbšieho a univerzálnejšieho procesu. Preto aj entropia v štatistickej mechanike sa istým spôsobom už vymaňuje z rýdzo fyzikálneho rámca a stáva sa všeobecnejším, oveľa flexibilnejším a potenciálne aj širšie aplikovateľným konceptom. Napokon aj pojmy „makrostav" a „mikrostav" majú svojou povahou už všeobecnejšiu platnosť a možno s nimi narábať aj mimo rámca samotnej fyziky.

Uviedli sme, že počet mikrostavov systému, W, závisí od postulovaných vlastností častíc. Štatistická mechanika rozlišuje v tejto súvislosti tri kategórie častíc, ktorým zodpovedajú aj tri tzv. štatistiky, a síce (1) Maxwellova-Boltzmannova, (2) Boseho-Einsteinova a (3) Fermiho-Diracova. Vzhľadom na zameranie tohto príspevku uvádzame tu iba prvú, ktorá postuluje rozlíšiteľnosť častíc, takže W pre izolovaný systém s makrostavom, t. j. rozdelením $\{m_i\}$, je dané nasledovným výrazom:

$$(3) \quad W = \frac{m!}{m_1!m_2!...m_n!} = \frac{m!}{\prod_i m_i!} \, ,$$

kde m_i je počet častíc v energetickej hladine i (i =1, 2, ..., n) a m je celkový počet častíc v sledovanom systéme, t. j. $\sum_i m_i = m$. Keďže ale najpravdepodobnejší makrostav je ten, ktorému zodpovedá najväčší počet mikrostavov systému, je potrebné buď prirodzený logaritmus vzťahu (3), čo je entropia S, alebo priamo vzťah (3) maximalizovať[4]. Predtým však treba stanoviť vedľajšie podmienky (bez ktorých by systém nebol kompletne charakterizovaný), predstavujúce ohraničenia, ktoré pri maximalizácii musíme rešpektovať. Ak pracujeme s tzv. mikrokanonickým súborom, budú ohraničenia nasledovné:

$$(4) \quad \sum_i m_i = m$$

$$(5) \quad \sum_i m_i \epsilon_i = E,$$

kde ϵ_i je energia častice v hladine i (i = 1, 2..., n) a E celková energia systému, pričom ohraničenie (4) hovorí, že je fixovaný celkový počet častíc, a ohraničenie (5) hovorí, že je fixovaná celková energia systému. Maximalizácia S = lnW, resp. priamo W pri zohľadnení (4) a (5) vedie napokon k formule

$$(6) \quad m_i = \frac{m}{Z(\beta)} \exp(-\beta \varepsilon_i),$$

kde $Z(\beta) = \sum_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$ je tzv. partičná funkcia[5], pričom β je parameter, ktorý možno odhadnúť (stanoviť) na základe ohraničenia (5). Vzťah (6) tak udáva najpravdepodobnejšie rozdelenie častíc do jednotlivých energetických hladín, t. j. najpravdepodobnejší makrostav $\{m_i\}$, zodpovedajúce(i) maximálnej entropii za daných vedľajších podmienok.

2.3 Entropia ako koncept teórie informácie

Tretia základná formulácia a interpretácia entropie sa objavila koncom štyridsiatych rokov 20. storočia, pričom jej vznik je spojený predovšetkým s menom amerického bádateľa C. E. Shannona [14].

Teória informácie vznikla ako produkt matematického spracovania odovzdávania správ. Jedna zo základných otázok spojených s takouto činnosťou

---

[4] V oboch prípadoch vedie maximalizačný postup k rovnakému výsledku.

[5] Partičná funkcia sa niekedy nazýva aj štatistická suma systému ([19], 79). Táto funkcia sa v štatistickej mechanike považuje za veľmi dôležitú, keďže prostredníctvom nej možno vyjadriť celý rad iných vzťahov.

súvisí s vyjadrením množstva informácie, ktoré je obsiahnuté v odovzdávanej správe, resp. v celom súbore takýchto správ.

Uveďme, že teória informácie spája pojem informácie s odstraňovaním neurčitosti ([5], 18). Správa, ktorá neodstraňuje neurčitosť, nenesie žiadnu informáciu; preto iba správe odstraňujúcej neurčitosť možno pripísať isté množstvo informácie. Pri takomto postupe v snahe o matematické vyjadrenie množstva informácie sa ukázalo, že najvhodnejšou funkciou, prostredníctvom ktorej možno vyjadriť množstvo informácie nesené nejakou správou, t. j. jej informačný obsah, h, ak pravdepodobnosť realizácie (výskytu) tejto správy je p, je logaritmická funkcia v tvare

(7) $h = \log(1/p) = -\log p.$

Vzťah (7), ak pripomenieme, že $\log 1 = 0$, vyhovuje nasledovným požiadavkám ([15], 5):

Ak $p = 1$, tak je $h = 0$. Realizácia (v teoreticko-pravdepodobnostnom zmysle) správy, ktorá je úplne istá, nemôže, pochopiteľne, odstraňovať žiadnu neurčitosť.

Ak pracujeme s dvoma správami, pravdepodobnosti ktorých sú p_1 a p_2, pričom $p_1 < p_2$, bude $h_1 > h_2$. Správa s menšou pravdepodobnosťou realizácie (výskytu) by odstraňovala, ak by sa realizovala, väčšie množstvo neurčitosti, t. j. niesla by väčšie množstvo informácie než správa s väčšou pravdepodobnosťou realizácie.

Ak dve správy s pravdepodobnosťami p_1 a p_2 sú od seba nezávislé, bude pravdepodobnosť ich združenej realizácie (výskytu) $p_{12} = p_1.p_2$, z čoho vyplýva, že $h_{12} = -\log p_{12} = -\log(p_1.p_2) = -(\log p_1 + \log p_2) = h_1 + h_2$. Množstvo informácie obsiahnuté v združenom výskyte takýchto správ je súčtom množstiev informácie obsiahnutej v každej z týchto správ.

K vzťahu (7) treba ešte poznamenať, že vyjadruje iba potenciálne množstvo informácie nesené správou, ktorej pravdepodobnosť realizácie je p. Je to preto, že vopred nevieme, či sa táto správa bude aj realizovať. Navyše, keďže každú informáciu chápeme ako odstránenú neurčitosť, možno vzťah (7) interpretovať zároveň aj ako mieru neurčitosti správy. Inými slovami, pred realizáciou (experimentom) možno hovoriť o neurčitosti správy, kým po realizácii (experimente) o informácii, pretože neurčitosť sa odstráni, takže získané množstvo informácie je rovnako veľké ako neurčitosť pred realizáciou (experimentom).

Ak pracujeme s celým súborom správ, pravdepodobnosti ktorých sú p_i ($i = 1, 2..., n$), pričom nevieme, ktorá z nich sa bude realizovať, možno formulovať iba očakávané (stredné) množstvo informácie, t. j. množstvo informácie pripadajúce v priemere na jednu správu. Za tejto situácie musíme aj hodnoty

h_i chápať ako hodnoty náhodnej premennej. Keďže pravdepodobnosti realizácie jednotlivých správ sú p_i, budú aj množstvá informácie v nich obsiahnuté, t. j. hodnoty h_i, mať pravdepodobnosti p_i, takže očakávané (stredné) množstvo informácie (tzv. matematická nádej) bude teraz ([10], 265)

$$(8) \quad H(\{p_i\}) = \sum_i p_i h_i = -\sum_i p_i \log p_i \,.$$

Vzťah (8) sa v teórii informácie označuje ako entropia rozdelenia pravdepodobnosti, t. j. $H(\{p_i\})$; je všeobecne známy ako Shannonova entropia[6]. Keďže ale vzťah (8) je zovšeobecnením vzťahu (7), ktorý sme interpretovali aj ako mieru neurčitosti správy, možno aj vzťah (8) interpretovať ako mieru neurčitosti, a sice ako strednú neurčitosť pripadajúcu na jednu správu z celého súboru správ alebo jednoducho ako všeobecnú mieru neurčitosti, resp. Shannonovu mieru neurčitosti. Opäť poznamenávame, že ide o neurčitosť a zároveň o informáciu; pred realizáciou (experimentom) ide o neurčitosť, po realizácii (experimente) ide o informáciu. Je tu teda jasná zhoda s tvrdením, že informácia je odstránená neurčitosť.

Poznamenajme, že na pôde teórie informácie bol okrem Shannonovej entropie formulovaný celý rad ďalších informačných mier, ktorým však v kontexte tohto príspevku nebudeme venovať osobitnú pozornosť. Hoci Shannon odvodil formulu (8) úplne nezávisle od štatistickej mechaniky, vychádzajúc pritom z celkom inej problematiky (prenos správ, komunikácia), existuje prirodzený matematický prechod od entropie v zmysle štatistickej mechaniky k entropii v zmysle teórie informácie. Tento prechod je nasledovný: Ak zavedieme relatívnu početnosť, t. j. $f_i = m_i/m$, kde, pripomíname, m_i je počet častíc v energetickej hladine i (i = 1, 2, m) a m celkový počet častíc [pozri vzťah (3)], potom lnW, čo je entropia, resp. lnW/m, čo je stredná entropia pripadajúca na jednu časticu, za použitia tzv. Stirlingovej aproximácie (pre veľké m_i), t. j. $\ln m_i! = m_i \ln m_i - m_i$, možno prepísať do tvaru

$$(9) \quad S = -m \sum_i f_i \ln f_i$$

[6] Vzťah (8) sa niekedy dopĺňa konštantou $k > 0$, t. j. $H = -k\sum_i p_i \log p_i$, ktorej zmysel spočíva vo vyjadrení entropie H v želateľných jednotkách informácie. Okrem toho poznamenajme, že vo vzťahu (8) je definitoricky určené, aby sa zabezpečila spojitosť funkcie v počiatku, že $0 \log 0 = 0$, keďže $\lim_{p_i \to 0} p_i \log p_i = 0$.

$$(10)\quad \frac{S}{m} = -\sum_i f_i \ln f_i ,$$

v ktorom, ak postavíme $f_i = p_i$, dostaneme (8).[7]

Poznamenajme, že vzťah (9), resp. (10) bol známy v štatistickej mechanike dávno pred vznikom teórie informácie, pred objavením sa vzťahu (8) jednoducho ako iná verzia vzťahu (3). Nebolo však známe, že týmto vzťahom možno popísať aj očakávané množstvo informácie. Na druhej strane Shannon potom, čo sformuloval vzťah (8), váhal, ako ho nazvať. Napokon sa priklonil k názvu „entropia" na základe odporúčania významného matematika Johna von Neumanna, ktorý si uvedomil podobnosť so vzťahom (9), resp. (10). O podobnosti hovoríme preto, že tieto dva vzťahy [vzťah (8) na jednej strane a vzťah (9), resp. (10), na strane druhej] nie sú celkom identické. Vo vzťahu (9), resp. (10) ide explicite o relatívnu početnosť, kým vo vzťahu (8) o pravdepodobnosť per se, ktorá nemusí byť vždy chápaná ako relatívna početnosť. Navyše, Shannon odvodil vzťah (8) axiomaticky, bez použitia Stirlingovej aproximácie. Preto ak sa vzťah (9), resp. (10) interpretuje aj ako miera informácie, nemožno podľa Walsha a Webbera [16] hovoriť o Shannonovej, ale o Brillouinovej miere informácie.

3 Princíp maximálnej entropie

Jeden z najvýznamnejších krokov, ktorý sa ukázal ako rozhodujúci pri vykročení entropie z rámca svojej pôvodnej fyzikálnej domény a zároveň pri jej transformácii na nástroj modelovania, a to aj mimo rámca prírodných vied, bola formulácia princípu maximálnej entropie (maximum entropy principle), ktorú uskutočnil americký fyzik E. T. Jaynes [7][8].

Pripomeňme, že už v časti **2.2**, v ktorej sme analyzovali entropiu v zmysle štatistickej mechaniky, sme poukázali na to, že táto disciplína rieši v rozsiahlej miere problémy týkajúce sa rozdelenia častíc, pričom hľadá také rozdelenie, ktoré pri zohľadnení vedľajších podmienok zodpovedá maximálnej entropii, keďže takéto rozdelenie je najpravdepodobnejšie. Jaynes sa však pri riešení tohto problému, t. j. pri hľadaní rozdelenia rozhodol postupovať iným spôsobom, a síce nie prostredníctvom maximalizácie štatisticko-mechanickej, t. j. Boltzmannovej entropie, ale prostredníctvom maximalizácie infor-

[7] Skutočnosť, že vo vzťahoch (9), (10) sa objavuje „m", na veci nič nemení, keďže ide o konštantu.

[8] Niekedy sa tento princíp formuluje aj ako princíp maximalizácie entropie (entropy maximizing principle).

mačnej, t. j. Shannonovej entropie, ktorá však, ako sme už uviedli, vôbec nevznikla pre potreby štatistickej mechaniky, ale pre celkom iné potreby. O čo sa teda opiera Jaynesov prístup?

Akýkoľvek rozdeľovací model je odhadom rozdelenia. Fundamentálnou požiadavkou pri odhade je však to, aby tento odhad bol, vyjadrené rečou matematickej štatistiky, minimálne vychýlený (least biased), t. j., inými slovami, aby tento bol maximálne nestranný (nezaujatý), maximálne neutrálny. Shannova entropia má v tejto súvislosti tú pozoruhodnú vlastnosť, že zabezpečuje práve takýto minimálne vychýlený odhad rozdelenia pravdepodobnosti pri zohľadnení všetkých vedľajších podmienok chápaných ako disponibilná informácia. Keďže rozdeľovacie modely štatistickej mechaniky sa dajú formulovať ako modely rozdelenia pravdepodobnosti, možno tieto modely odvodiť prostredníctvom maximalizácie Shannonovej entropie, čo Jaynes aj skutočne urobil. Hoci oba postupy, t. j. tak postup založený na maximalizácii Boltzmannovej, ako aj postup založený na maximalizácii Shanonovej entropie, vedú k rovnakým výsledkom, ide tu o zásadnú zmenu prístupu. Formulácia rozdeľovacích modelov založená na maximalizácii Shannonovej entropie nevyžaduje vytváranie predstáv o správaní modelovaného systému, nevyžaduje zavádzanie takých pojmov, ako je pojem izolovaného či rovnovážneho systému, ako sú pojmy „makrostav" a „mikrostav" a pod. Formulácia rozdeľovacieho modelu sa tu deje iba na základe poznania disponibilnej informácie (vedľajších podmienok), vyjadrenej spravidla v podobe stredných hodnôt či, všeobecnejšie, štatistických momentov jednej alebo viacerých náhodných premenných[9]. Konštrukcia rozdeľovacieho modelu je tu teda záležitosťou iba rýdzej štatistickej inferencie. Preto Jaynesov princíp je rýdzo inferenčný princíp. Preto jeho platnosť nie je viazaná iba na oblasť štatistickej mechaniky; tento princíp možno uplatňovať ako všeobecný princíp.

Jaynesov postup, ktorý fyzici nazvali „Jaynesov formalizmus", sa často porovnáva s Laplaceovým princípom nedostatočného dôvodu (insufficient reason), podľa ktorého v prípade neprítomnosti akejkoľvek informácie (okrem prípadov, ktoré môžu nastať, čo je rýdzo formálna požiadavka), nie je žiadny dôvod uprednostniť iné ako rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti.

---

[9] Motivácia Jaynesa formulovať princíp maximálnej entropie práve na báze teórie informácie v spojitosti s Shannonovou informačnou entropiou úzko súvisí s jeho chápaním entropie, podľa ktorého „entropia termodynamického systému je mierou stupňa neznalosti osoby, ktorej poznatky o jeho mikrostave pozostávajú jedine z makroskopických veličín X, definujúcich jeho termodynamický stav. To je úplne ‚objektívna' veličina, a to v tom zmysle, že je jedine funkciou X, a nezávisí na kohokoľvek individuálnych vlastnostiach. Nie je teda dôvod, aby nemohla byť meraná v laboratóriu" ([8], 42). Takéto chápanie entropie je vedecky veľmi silne vyargumentované v [8].

To je jediný korektný postup. Akýkoľvek iný postup by znamenal predpokladať nejakú, hoci len skrytú informáciu, čo by ale bolo v rozpore s tvrdením o neprítomnosti akejkoľvek informácie[10]. Laplaceov princíp však nehovorí nič o tom, ako postupovať za situácie, keď už disponujeme nejakou informáciou, aké rozdelenie pravdepodobnosti zvoliť za takejto situácie. A tu práve nastupuje Jaynesov princíp maximálnej entropie. Poznamenajme, že pri voľbe príslušného rozdelenia pravdepodobnosti existuje veľké množstvo možností, dokonca teoreticky nekonečne veľa [4], ktoré sú v zhode s disponibilnou informáciou (vedľajšími podmienkami, ohraničeniami), avšak jedine maximalizácia Shannonovej entropie zabezpečuje rozdelenie, ktoré je minimálne vychýlené, ktoré zároveň nevylučuje žiadnu možnosť a ktoré je najrovnomernejšie, najplochejšie, vykazujúce najvyššiu neurčitosť. Jaynesov princíp tak predstavuje zovšeobecnenie Laplaceovho princípu a zahrnuje aj prípady, keď už disponujeme informáciou, resp. Laplaceov princíp predstavuje iba špeciálny prípad Jaynesovho princípu, keď nedisponujeme žiadnou informáciu a vedľajšie podmienky sa redukujú iba na formálno-matematickú požiadavku (ohraničenie) $\sum_i p_i = 1$, takže $p_i = 1/n =$ const, kde n je počet pozorovaní. Ak už však disponujeme informáciou, týkajúcou sa napr. strednej hodnoty nejakej relevantnej náhodnej veličiny (čo je spravidla najčastejší prípad), t. j.

$E[f(x)] = \sum_i f(x_i)p_i$, čo je okrem $\sum_i p_i = 1$ druhá vedľajšia podmienka, kde x_i ($i = 1, 2, ..., n$) sú jednotlivé (diskrétne) hodnoty náhodnej veličiny x, potom rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré rezultuje z maximalizácie Shannonovej entropie pri zohľadnení dvoch uvedených vedľajších podmienok (ohraničení) bude

$$(11)\quad p_i = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta x_i),$$

kde $Z(\beta) = \sum_i \exp(-\beta x_i)$ je opäť partičná funkcia, pričom β je parameter rozdelenia, hodnotu ktorého možno odhadnúť (stanoviť) na základe druhého ohraničenia. Toto rozdelenie, ako vidno, už nie je úplne rovnomerné, ale je opäť najrovnomernejšie, najplochejšie, najneurčitejšie, najnevychýlenejšie vzhľadom na uvedené dve vedľajšie podmienky.

---

[10] Jaynes tvrdí ([8], 16), že tento princíp, ktorý sa všeobecne pripisuje Laplaceovi, sformuloval už skôr (v r. 1713) švajčiarsky matematik J. Bernoulli.

Jaynesov princíp, predstavujúci z matematického hľadiska variačný princíp, teda treba chápať ako isté kritérium či pravidlo výberu, ktoré požaduje, aby pri hľadaní rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré berie do úvahy celú disponibilnú informáciu, matematicky vyjadrenú v podobe vedľajších podmienok (ohraničení) vrátane formálno-matematických, bolo vzaté to, ktoré rezultuje z maximalizácie Shannovej entropie[11]. Jaynesov princíp tak treba chápať, ako sme už konštatovali, ako princíp, ktorým sa má riadiť postup, usudzovanie bádateľa, t. j. ako inferenčný princíp.

4 Mimofyzikálna aplikácia princípu maximálnej entropie

Hoci Jaynesov princíp maximálnej entropie má atribút všeobecnosti, Jaynes sám ho aplikoval, ako sme už uviedli, iba v oblasti štatistickej mechaniky. Rozsiahlu a výraznú aplikáciu však našiel v mimofyzikálnych oblastiach. Z nich spomenieme iba niektoré: rozpoznávanie obrazcov, nelineárna spektrálna analýza, teória radov, urbánna a regionálna analýza. Posledná oblasť, blízka profesionálnej orientácii autora tohto príspevku, bola vybratá ako príklad, na ktorom budeme bližšie demonštrovať túto aplikáciu. Poznamenajme, že zásadný bádateľský vklad tu urobil britský matematik a regionálny analytik A. G. Wilson ([17]; [18]).

Urbánna a regionálna analýza, študujúca mestá a regióny v kontexte priestorovej organizácie ľudskej spoločnosti, ktorá ako celok je predmetom štúdia humánnej a regionálnej geografie, rieši často ako svoje typické problémy rozdelenie obyvateľstva a ľudských aktivít do územných jednotiek. Jedným z jej základných cieľov je formulácia modelov opisujúcich práve takéto rozdelenie. Ide tu teda o špeciálny prípad rozdeľovacích modelov ako takých, čo vytvára predpoklady pre aplikáciu princípu maximálnej entropie. Aby úvahy o možnej aplikácii uvedeného princípu v mimofyzikálnej, a

---

[11] „Vedľajšie podmienky" a „ohraničenia" sú alternatívne vyjadrenia jednej a tej istej skutočnosti (situácie). „Disponibilná informácia" predstavuje tiež vedľajšie podmienky, resp. ohraničenia, avšak spravidla bez rýdzo formálno-matematických ohraničení, napr. $\sum_i p_i = 1$, ktoré ale pri maximalizácii treba brať do úvahy. Tento pojem sa používa preto, aby sa zdôraznilo, že ide o poznatky, ktoré máme o modelovanom systéme (fragmente reality) či o modelovanej situácii predtým než uplatníme maximalizačný postup rezultujúci do rozdeľovacieho modelu. Hovoriť o disponibilnej informácii je logicky konzistentné s celkovou konceptuálnou výstavbou teórie informácie, o ktorú sa Jaynesov princíp opiera. Okrem toho poznamenajme, že Jaynes uprednostňuje tzv. subjektívnu interpretáciu pravdepodobnosti, aby zdôraznil, že pod pravdepodobnosťou rozumie stav nášho poznania, čo je opäť konzistentné s jeho princípom.

špeciálne v spoločensko-vednej oblasti nezostali iba v deklaratívnej podobe, je predmetom tejto časti príspevku jej exemplifikácia.

Poznamenajme najskôr, že táto exemplifikácia sa uskutočňuje v dvoch rovinách, a síce v rovine maximalizácie štatisticko-mechanickej, t. j. Boltzmannovej entropie, a v rovine maximalizácie informačnej, t. j. Shannonovej entropie. Prvú rovinu sme sa rozhodli zaradiť preto, že vytvára isté priaznivé predpolie pre druhú rovinu. Navyše, medzi situáciou štatistickej mechaniky a situáciou urbánnej a regionálnej analýzy existuje veľmi prirodzená analógia, ktorá umožňuje nenásilne aplikovať v urbánnej a regionálnej analýze také pojmy, ako sú „štatistická pravdepodobnosť", „makrostav", „mikrostav" a pod. Začneme preto s postupom, ktorý narába s formalizmom štatistickej mechaniky.

4.1 Aplikácia štatisticko-mechanického formalizmu

Jedným z najtypickejších rozdeľovacích problémov, ktorý analyzuje urbánna a regionálna analýza, je premiestňovanie obyvateľstva (ale nielen jeho) z jedného územia (miesta, oblasti) do druhého. Ide napr. o dochádzku za prácou, za službami, sťahovanie (migráciu) a pod. Tento typ analýzy vyžaduje narábať s množinou východiskových a cieľových územných jednotiek, medzi ktorými dochádza k premiestňovaniu. Označme východiskové územné jednotky indexom i (i = 1, 2, ..., m), cieľové územné jednotky indexom j (j = 1, 2, ..., n) a počet osôb premiestňujúcich sa z i do j T_{ij}. Názornú predstavu o tejto situácii poskytuje tabuľka 1, v ktorej riadky predstavujú východiskové územné jednotky, i, a stĺpce cieľové územné jednotky, j.

Tab. 1		j					
		j = 1	j = 2	.	.	.	j = n
i	i = 1	T_{11}	T_{12}	.	.	.	T_{1n}
	i = 2	T_{21}	T_{22}	.	.	.	T_{2n}
	.	.	.				.
	.	.	.				.
	.	.	.				.
	i = m	T_{m1}	T_{m2}	.	.	.	T_{mn}

Z tabuľky 1 je zrejmé, že tu ide o typický rozdeľovací problém. Ide teraz o skonštruovanie modelu, ktorý by odhadol hodnoty T_{ij} čiže rozdelenie $\{T_{ij}\}$. Za týmto účelom najskôr musíme stanoviť formulu predstavujúcu štatistickú pravdepodobnosť, udávajúcu počet mikrostatov systému. Keďže hodnoty T_{ij} možno chápať ako prirodzenú analógiu hodnôt m_i (pozri časť **2.1**), je celkom prirodzené stanoviť aj štatistickú pravdepodobnosť ako analógiu vzťahu (3). Aj tu totiž môžeme rozdelenie $\{T_{ij}\}$ podobne ako rozdelenie $\{m_i\}$ chápať ako makrostav systému. Tak, ako sa daný makrostav $\{m_i\}$ dá realizovať veľkým množstvom mikrostavov, t. j. preskupovaním konkrétnych častíc (A, B, C, ...) medzi jednotlivými energetickými hladinami, aj daný makrostav $\{T_{ij}\}$ sa dá realizovať veľkým množstvom mikrostavov, t. j. preskupovaním konkrétnych osôb (A, B, C, ...) medzi pármi východiskových a cieľových územných jednotiek, t. j. (ij), čiže medzi štvoruholníkovými políčkami (priesečníkmi riadkov a stĺpcov) tabuľky 1. Tento počet mikrostavov (preskupení) je preto možné zadať kombinatorickou formulou analogickou vzťahu (3), a to

$$(12)\quad W = \frac{T!}{\prod\limits_{i}\prod\limits_{j} T_{ij}!},$$

kde T je celkový počet premiestňujúcich sa osôb, t. j. $T = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} T_{ij}$.

Teraz však musíme nájsť také rozdelenie, t. j. taký makrostav $\{T_{ij}\}$, ktorému prislúcha najväčší počet mikrostavov systému, t. j. taký makrostav, ktorý sa dá realizovať najväčším počtom preskupení, čiže makrostav, ktorý je za príslušných vedľajších podmienok (ohraničení), vyžadujúcich identifikáciu, najpravdepodobnejší. Za prirodzené vedľajšie podmienky (ohraničenia) možno považovať, opäť ako analógiu vzťahov (4), (5), nasledovné:

$$(13)\quad \sum_{j} T_{ij} = O_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$(14)\quad \sum_{i} T_{ij} = D_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

$$(15)\quad \sum_{i}\sum_{j} T_{ij}c_{ij} = C.$$

Podmienka (ohraničenie) (13) stanovuje, že pre každé i je fixovaný počet osôb vychádzajúcich z i, smerujúcich pritom do všetkých cieľových územných jednotiek j (j = 1, 2, ..., n), t.j. sú fixované riadkové súčty v tabuľke 1. Podmienka (ohraničenie) (14) stanovuje, že pre každé j je fixovaný počet osôb prichádzajúcich do j, vychádzajúcich pritom zo všetkých východiskových územných jednotiek i (i = 1, 2, ..., m), t. j. sú fixované stĺpcové súčty v tabuľke 1. Podmienka (ohraničenie) (15) stanovuje, že sú fixované celkové premiestňovacie náklady C, pričom premiestňovacie náklady z i do j sú c_{ij}.

Maximalizácia prirodzeného logaritmu vzťahu (12), čo je entropia (S = ln W), resp. maximalizácia už priamo vzťahu (12) pri zohľadnení (13) – (15), vedie (bez bližšieho rozvádzania príslušného matematického formalizmu) k nasledovnej rozdeľovacej formule:

(16) $T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta c_{ij})$,

kde A_i a B_j sú riadkové a stĺpcové parametre rozdelenia (16), zabezpečujúce splnenie ohraničení (13), (14), a ß je celotabuľkový parameter rozdelenia (16), zabezpečujúci splnenie ohraničenia (15), pričom A_i a B_j sa dajú vyjadriť nasledovne:

(17) $A_i = [\sum_j B_j D_j \exp(-\beta c_{ij})]^{-1}$

(18) $B_j = [\sum_i A_i O_i \exp(-\beta c_{ij})]^{-1}$

Parameter β možno odhadnúť (stanoviť) na základe ohraničenia (15).

Vzťah (16) spolu so vzťahmi (17), (18) predstavuje teraz entropiu maximalizujúci rozdeľovací model opisujúci objem premiestňovania medzi i a j. Tento model je však iba základný (východiskový). Modifikáciou vedľajších podmienok (resp. inými modifikáciami) možno dospieť k celej triede takýchto rozdeľovacích modelov, prostredníctvom ktorých možno analyzovať rôzne situácie týkajúce sa premiestňovania (resp. ďalších aspektov spojených s premiestňovaním). Výsledky kalibrácie (testovania) takéhoto modelu na dátach o migrácii v rámci bývalého Československa, resp. súčasného Slovenska možno nájsť v [13] a [1].

Poznamenajme ešte, že proti postupu v tejto časti, hoci založenom na prirodzenej, nenásilnej analógii medzi situáciou v štatistickej mechanike a v urbánnej a regionálnej analýze, by mohol niekto vzniesť námietku, že sa tu vytvára analógia medzi správaním častíc a správaním osôb. Ako argument by mohol uviesť, že ľudské správanie, keďže je cieľavedomé, takúto analógiu nepripúšťa. Tento argument je bezpochyby závažný. Ľudské správanie je, pochopiteľne, cieľavedomé. Bádateľ, ktorý analyzuje ľudské správanie na úrovni celých ľudských agregátov, však sotva môže poznať ciele na úrovni správania jednotlivých ľudských indivíduí. Preto na správanie na tejto (agregovanej) úrovni, hoci aj ľudských indivíduí, je nútený pozerať sa podobne ako štatisticko-mechanický bádateľ na správanie častíc, a to ako na správanie z jeho hľadiska náhodné, v ktorom sa presadzujú štatistické tendencie („zákony" veľkých čísel). Nejde tu, ako všeobecne v štatistike, o konštrukciu kauzálnych modelov, ale o konštrukciu modelov fenomeno-logických. To však vôbec nie je dôvod na to, aby takéto modely boli diskvalifikované, pretože ich bádateľský význam, ako to ukazuje história vedeckého bádania, je nepochybný.

V súvislosti s uplatnením štatisticko-mechanického formalizmu mimo rámca štatistickej mechaniky považujeme za užitočné ďalej poznamenať, že v práci dvoch významných fyzikov, Landaua a Kitajgorodského [11], je vyslovený názor, podľa ktorého systémy, ktoré sú ponechané samy na seba, t. j. bez externého zasahovania, spejú bez ohľadu na ich povahu spontánne k stavu, ktorý sa dá realizovať najväčším počtom spôsobov, čo je práve myšlienka obsiahnutá v entropiu maximalizujúcich modeloch.

4.2 Aplikácia Jaynesovho teoreticko-informačného formalizmu

Uplatnenie Jaynesovho formalizmu na konštrukciu modelu opisujúceho premiestňovanie osôb z východiskových územných jednotiek i do cieľových jednotiek j vyžaduje v prvom rade stanoviť pre túto situáciu ekvivalent Shannonovej entropie a následne disponibilnú informáciu vyjadrenú v podobe vedľajších podmienok (ohraničení). Vzhľadom na predpolie vytvorené v časti **4.1** je zrejmé, že tento ekvivalent možno vyjadriť nasledovne:

(19) $H = -\sum_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij}$,

kde P_{ij} predstavuje pravdepodobnosť, že náhodne vybratá osoba sa premiestňuje z i do j, pričom za najlepší odhad P_{ij} možno považovať relatívnu početnosť T_{ij}/T. Disponibilnú informáciu vyjadrenú v podobe vedľajších podmienok (ohraničení) treba teraz zapísať prostredníctvom príslušných pravdepodobností a príslušnej strednej hodnoty, a síce takto:

(20) $\sum_j P_{ij} = U_i \; (i = 1, 2, ..., m)$

(21) $\sum_i P_{ij} = V_j \; (j = 1, 2, ..., n)$

(22) $\sum_i \sum_j P_{ij} c_{ij} = C/T = \bar{c}$,

kde $C/T = \bar{c}$ predstavuje stredné (očakávané) premiestňovacie náklady. Pravdepodobnosť U_i, ktorej najlepší odhad predstavuje relatívna početnosť O_i/T, treba chápať ako pravdepodobnosť, že náhodne vybratá osoba pochádza z i, kým pravdepodobnosť V_j, ktorej najlepší odhad predstavuje relatívna početnosť D_j/T, treba chápať ako pravdepodobnosť, že náhodne vybratá osoba pochádza z j. Ohraničenie (20) stanovuje, že pre všetky i sú fixované (známe) pravdepodobnosti U_i, ohraničenie (21) stanovuje, že pre všetky j sú fixované (známe) pravdepodobnosti U_i, a ohraničenie (22) stanovuje, že sú fixované (známe) stredné premiestňovacie náklady $\bar{c}$. Je zrejmé, že ohraničenia (20) – (22) sú pravdepodobnostnou analógiou ohraničení (13) – (15). Našou úlohou je teraz v súlade s úvahami obsiahnutými v časti **3** nájsť minimálne vychýlené rozdelenie pravdepodobnosti P_{ij}, t. j. $\{P_{ij}\}$, pri zohľadnení disponibilnej informácie obsiahnutej v ohraničeniach (20) – (22). Riešenie tejto úlohy spočíva v maximalizácii Shannonovej entropie, t. j. vzťahu (19), zohľadňujúc pritom (20) – (22). Výsledná rozdeľovacia formula, rezultujúca z tejto maximalizácie, je teraz

(23) $P_{ij} = A_i\, B_j\, U_i\, V_j \exp(-\beta c_{ij})$,

pričom

(24) $A_i = [\sum_j B_j V_j \exp\left(-\beta c_{ij}\right)]^{-1}$

(25) $B_j = [\sum_i A_i U_i \exp\left(-\beta c_{ij}\right)]^{-1}$

Je očividné, že medzi vzťahmi (16) – (18) a (23) – (25) existuje zrejmá formálno-štrukturálna identita, čo vyplýva zo skutočnosti, že existuje prirodzený matematický prechod od formulácie entropie v štatistickej mechanike k formulácii entropie v teórii informácie. Odvodenie vzťahov (23) – (25) na rozdiel od vzťahov (16) – (18) však už nepredpokladá (nevyžaduje) zavádzanie žiadnej analógie so situáciou v štatistickej mechanike. Medzičlánok v podobe istej analógie, ktorú sme analyzovali v časti **4.1**, tu vypadáva, stáva sa nadbytočný. Formulácia rozdeľovacieho modelu v tomto prípade nevyžaduje nič viac ako poznanie disponibilnej informácie (ohraničení) a následnú maximalizáciu Shannonovej entropie, zohľadňujúc pritom práve tieto ohraničenia. Rozdeľovací model tu nevzniká ako produkt akéhosi odpozorovania správania analyzovaného systému (fragmentu reality), ale ako produkt uplatnenia istého typu inferencie na disponibilnú informáciu o analyzovanom systéme, týkajúcu sa istých ohraničení naložených na tento systém.

V súvislosti s aplikáciou princípu maximálnej entropie v urbánnej a regionálnej analýze považujeme za potrebné ešte poznamenať, že entropiu maximalizujúce modely, a to nielen premiestňovacie, analyzované v tomto príspevku, sa stali bádateľsky mimoriadne atraktívne a efektívne. Ich uplatnenie tu znamenalo doslova zlom v modelovaní, prejavujúci sa v priam explozívnom náraste počtu štúdií. Tieto modely aspoň 20 rokov určovali smer modelovania v tejto disciplíne, čo možno voľnejšie vyjadriť tak, že tu pre túto dobu predstavovali akúsi modelovú paradigmu.

5 Záver

Základným zámerom tohto príspevku bolo ukázať, že entropia je koncept, ktorý prekročil svoju pôvodnú prírodovednú determináciu a stal sa bádateľským nástrojom, osobitne nástrojom na budovanie modelov, aj mimo rámca prírodných vied. Rozhodujúcim krokom v tomto smere bola Jaynesova formulácia princípu maximálnej entropie, vychádzajúca z teoreticko-informačného chápania entropie. Uvedený princíp požaduje (hlása), aby z množiny pravdepodobnostných rozdelení, zhodných s disponibilnou informáciou, bolo vybraté to, ktoré rezultuje z maximalizácie Shannovej entropie, pretože jediné takéto rozdelenie je minimálne vychýlené či maximálne nestranné. Z formulácie Jaynesovho princípu je zrejmé, že tento princíp abstrahuje od povahy (charakteru) systémov (fragmentu reality), ktoré (ktorá) sú (je) predmetom analýzy (modelovania), preto je rovnako dobre aplikovateľný tak v oblasti prírodných vied, ako aj mimo nich. Uzatváranie sa tu deje výlučne na základe dát. S pojmom „entropia" sa tu narába spôsobom, ktorý sotva možno považovať za redukcionistický.

Hoci ide o rýdzo inferenčný princíp, t. j. princíp, ktorým sa riadi uzatváranie bádateľa, skutočnosť, že mnohé rozdelenia pravdepodobnosti, medzi nimi i normálne (ktorému podlieha veľké množstvo tak prírodných, ako aj spoločenských javov), sa dajú odvodiť uplatnením Jaynesovho princípu, niektorí autori (napr. [4]) zastávajú názor, že v prípade tohto princípu ide viac než o číru konvenciu.

Katedra regionálnej geografie, ochrany a plánovania krajiny
Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského
Mlynská dolina B1
SK – 842 15 Bratislava
E-mail: Paulov@fns.uniba.sk

LITERATÚRA

[1] BEZÁK, A. (2000): Interregional Migration in Slovakia: Some Test of Spatial Interaction Models. In: **Geografický časopis**, vol. 52, No 1, 15-32.

[2] BRILLOUIN, L. (1966): **Naučnaja neopredelennosť i informacija** (preklad z angličtiny). Mir, Moskva.

[3] CARNAP, R. (1977): **Two Essays on Entropy**. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London.

[4] GUIASU, S., SHENITZER, A. (1986): Princíp maxima entropie (preklad z angličtiny). In: **Pokroky matematiky, fyziky a astronomie**, ročník XXXI, 214-224.

[5] HABR, J., VEPŘEK, J. (1972): **Systémová analýza a syntéza**. SNTL, Praha.

[6] ILKOVIČ, D. (1958): **Fyzika**. ŠNTL, Bratislava.

[7] JAYNES, E. T. (1957): Information Theory and Statistical Mechanics. In: **The Physical Review**, 106, 620-630.
[8] JAYNES, E. T. (1979): Where Do We Stand on Maximum Entropy? In: R. D. Levine, Tribus, M. (eds.): **The Maximum Entropy Formalism**. MIT Press, Cambridge (Mass.), 15-118.
[9] KAMMER, H., SCHWABE, K. (1971): **Einführung in die statistische Thermodynamik**. Akademie-Verlag, Berlin.
[10] KÄMMERER, W. (1974): **Einführung in mathematische Methoden der Kybernetik**. Akademie-Verlag, Berlin.
[11] LANDAU, L. D., KITAJGORODSKIJ, A. L. (1983): **Molekuly** (preklad z ruštiny). Alfa, Bratislava.
[12] LEVIČ, V. G. (1954): **Úvod do statistické fyziky** (preklad z ruštiny). NČSAV, Praha.
[13] PAULOV, J. (1993): Entropia v urbánnej a regionálnej analýze: konceptuálny rámec a základy aplikácie. In: **Geographia Slovaca**, No 2, Geografický ústav SAV, Bratislava.
[14] SHANNON, C. E. (1948): A Mathematical Theory of Communication. In: **Bell System Technical Journal**, Vol. 27, 379-423; 623-656.
[15] THOMAS, R. W. (1981): Information Statistics in Geography. In: **CATMOG** 31, Geo Books, Norwich.
[16] WALSH, J. A., WEBBER, M. J. (1977): Information Theory: Some Concepts and Measures. In: **Environment and Planning A**, Vol. 7, 99-108.
[17] WILSON, A. G. (1967): A Statistical Theory of Spatial Distribution Models. In: **Transportation Research**, Vol.1, 153-169.
[18] WILSON, A. (1970): **Entropy in Urban and Regional Modelling**. Pion, London.
[19] VOĽKENŠTEJN, M. V. (1986): **Entropija i informacija**. Nauka, Moskva.
[20] YOURGRAU, W., van der MERVE, A. (1972): Entropy (Positive and Negative), Information and Statistical Thermodynamics. In: REINES, F. (ed.): **Cosmology, Fusion and Other Matters**. Adam Hilger Ltd., London, 241-271.