Donald GILLIES: Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic
Assen, The Netherlands, Van Gorcum 1982, 103 s.

a. Všeobecná charakterizácia

Kniha sympatického rozsahu 103 strán predstavuje úvod do filozofie matematiky. Autor si zvolil pomerne úzku oblasť základov aritmetiky a relatívne krátke, zhruba dvadsaťročné obdobie medzi rokmi 1880 a 1903, aby čitateľa uviedol do jadra filozofickej problematiky, ktorá je dodnes živá a aktuálna. Zdá sa, že jeho voľba bola šťastná. Štandardné úvody začínajú zhruba tam, kde Gillies končí - Russellovými paradoxmi, kedy už základné filozofické pozície sú zastreté pomerne náročným technickým aparátom, neprístupným väčšine čitateľov. Naproti tomu oblasť a obdobie zvolené autorom majú tú výhodu, že sa tu objavuje väčšina fundamentálnych otázok filozofie matematiky, avšak použitý technický aparát je menší než inde. To umožňuje sledovať diskusiu spolu so všetkými technickými jemnosťami.

Ústrednou postavou knihy je Gottlob Frege. Výkladu jeho názorov je venovaných 6 z celkového počtu 12 kapitol. Prezentácia Fregeho nie osobitne, ako sa to bežne robí, ale spolu s Dedekindom a Peanom má viaceré výhody. Umožňuje lepšie pochopiť, v čom spočívala Fregeho originalita, a súčasne čo bolo štandardné v jeho období. Dedekind, rovnako ako Frege, bol zástancom logicizmu, t.j. veril že aritmetiku možno redukovať na logiku, ale na rozdiel od Fregeho považoval pojem množiny (v jeho terminológii systém) za pojem patriaci do logiky. Naproti tomu Peano popieral, že by bolo možné aritmetiku redukovať na logiku. Podľa Peana aritmetika obsahuje niekoľko jednoduchých pojmov, ktoré nie je možné definovať, ale možno ich iba axiomaticky charakterizovať. Frege redukciu aritmetiky na logiku pripúšťal, no podľa jeho názoru pojem množiny nebol logickým pojmom. Za základ redukcie si preto zvolil pojem pojmu.

Okrem tohto synchrónneho kontrastu sú postavy Fregeho, Dedekinda a Peana dôležité aj z diachrónneho hľadiska. Dedekindove práce mali bezprostredný vplyv na Zermela, a tým aj na celý prúd axiomatickej teórie množín. V Peanovi zas možno vidieť predstaviteľa formalistického programu vo filozofii matematiky a Frege svojou teóriou pojmu je predchodcom logiky vyšších rádov. Napriek tomu, že objavy uskutočnené v dvadsiatom storočí, ako Russellov paradox, Gödelova veta o neúplnosti a Skolemove neštandardné modely aritmetiky ukázali neudržateľnosť pôvodných názorov Fregeho, Dedekinda a Peana, tieto stanoviská neboli zavrhnuté, ale po radikálnej reformulácii dodnes žijú v modernej teórii množín, teórii dôkazov či intenzionálnej logike. Preto ich rozbor pomáha lepšie pochopiť niektoré zo základných hybných motívov modernej matematiky.

b. Obsah diela

V úvode autor začleňuje výskum základov aritmetiky do širšieho kontextu aritmetizácie analýzy, z ktorých vzišli.

ORGANON F 1 (1994), N. 2, 169-173

Aritmetizácia analýzy je vyvrcholením prúdu, ktorý, počínajúc Cauchym na začiatku 19. storočia, usiloval o zavedenie väčšej presnosti do rozvoja matematickej analýzy. Dedekind v práci *Spojitosť a iracionálne čísla* (1872) predložil svoju teóriu rezov, pomocou ktorej sa mu podarilo redukovať celú matematickú analýzu na úvahy o prirodzených číslach a ich aritmetike, a tak úspešne zavŕšiť program aritmetizácie analýzy. Ďalším krokom vo výstavbe pevných základov matematiky bolo vytvorenie spoľahlivých základov teórie prirodzených čísel. Existuje teda plynulý prechod od aritmetizácie analýzy v 70-tych rokoch 19. storočia k diskusii o základoch aritmetiky v jeho 80-tych rokoch. Keď Frege a Dedekind začínali svoje výskumy o základoch aritmetiky, muselo sa im zdať, že završujú posledný krok v konečnom a definitívnom spresnení matematickej analýzy. Výsledky ich analýz boli však podstatne iné, než ako očakávali. Miesto utvorenia pevných a trvalých základov analýzy ich práca vyústila do objavu logických paradoxov. Nechtiac pomohli vrhnúť základy matematiky do krízy, z ktorej sa dodnes úplne nezotavili. Predmetom Gilliesovej knihy je práve tento prechod od istoty a optimizmu osemdesiatych rokov minulého storočia ku kríze na začiatku nášho storočia.

Prvé štyri kapitoly knihy sú venované Fregeho kritike jeho predchodcov - Kanta a Milla.

Autor najskôr stručne prezentuje Kantove názory na filozofiu matematiky a potom sa venuje Fregeho kritike Kanta uvedenej v *Grundlagen der Arithmetik* (1884). Frege podáva novú definíciu Kantovho pojmu analytický, ktorá analytickosť súdu neuchopuje ako obsiahnutosť subjektu v predikáte, ako to robil Kant, ale ako odvoditeľnosť súdu bez použitia mimologických princípov. Frege tu sformuloval svoju základnú tézu, že **aritmetické vety sú v tomto zmysle analytické**, a teda apriori. Potom vyvracia Kantov názor, že súdy aritmetiky sú syntetické. Základný Fregeho argument Gillies nazýva Argumentom veľkých čísel. Spočíva v tom, že Kantov príklad $5 + 7 = 12$ Frege nahradí $135664 + 37863 = 173527$, aby ukázal, že tu žiadna intuícia pomocou prstov či bodov nepomôže. Na zvládnutie takýchto čísel musíme použiť teoretické schémy, ktoré sú za hranicami bezprostredne vnímateľného. Svoj argument veľkých čísel Frege úspešne používa aj proti Millovi, ktorý sa usiloval aritmetiku zdôvodniť empiricky. Platnosť vyššie uvedeného tvrdenia o súčte veľkých čísel sotva možno odvodiť z opakovania v skúsenosti. Ešte problematickejšie je to s číslom nula.

Ďalšie tri kapitoly (5, 6 a 7) sú venované výkladu Fregeho definícii čísla, Fregeho platonizmu a logicizmu. Ako je známe, Frege zhrnul svoje názory na povahu čísel do pomerne osobitého tvrdenia že "**obsahom výroku o čísle je tvrdenie o pojme**". Gillies venuje sedem strán knihy objasneniu tohto tvrdenia a jeho porovnaniu s Dedekindovým názorom, že čísla sú vlastnosti množín. Zvolený prístup je vhodný najmä pre matematikov, ktorí sú vychovaní v množinovej tradícii, a tak porovnanie s množinovým prístupom môže im byť mostom k pomerne nezvyčajnej Fregeho formulácii. Priznávam sa, že v mojom prípade to tak bolo. Po výklade Fregeho názoru na pojem čísla vedie už priama cesta k jeho platonizmu. Platonizmus vykladá v konfrontácii s psychologizmom, ktorého reprezentantmi sú Dedekind a Brouwer a fyzikalistickým redukcionizmom, ktorý sa usiluje aritmetické výrazy eliminovať, a tak redukovať jazyk len na fyzikálne definovateľné termíny. Oproti týmto teóriám má Frege pomerne presvedčivé argumenty založené na analýze viet, ktoré používajú všeobecný kvantifikátor. Pri týchto vetách je fyzikalistická redukcia nemožná, lebo vypovedajú o všetkých číslach, teda aj takých veľkých, že im vo vesmíre určite nič nezodpovedá. Psychologické zdôvodnenie takýchto tvrdení je tiež nepresvedčivé. Preto neostáva iná možnosť, než uznať nezávislú a objektívnu existenciu abstraktných entít. Po výklade Fregeho chápania pojmu čísla a Fregeho platonizmu je už pochopiteľný jeho logicizmus, ktorého cieľom je ukázať že **všetky dôkazy v aritmetike možno redukovať na čisto logické vyplývanie**. Takto formulovaný logicizmus je programom, ktorému Frege zasvetil značnú časť svojho života. Aby mohol svoj program uskutočniť, vymyslel aj zvláštnu logickú notáciu, tzv. pojmové písmo. No prv než Gillies prejde k výkladu Fregeho logickej notácie, ako aj realizácii logicistického programu v dvojdielnych *Základných zákono*ch *aritmetiky*, prezentuje najprv dobový kontext Fregeho výskumov.

Tri nasledujúce kapitoly (8, 9 a 10) sú venované výkladu názorov Dedekinda, Peana a ich porovnaniu s názormi Fregeho. Dedekind bol, podobne ako Frege, zástancom logicizmu, keď v štúdii *Was sind und was sollen die Zahlen sein?* píše: "Hovorením o aritmetike (algebre, analýze) ako časti logiky, mienim to, že považujem pojem čísla za úplne nezávislý od pojmov alebo intuícií priestoru a času, a považujem ho za bezprostredný dôsledok zákonov myslenia." Na rozdiel od Fregeho však svoj program výstavby základov aritmetiky založil na pojme systému, čím sa stal predchodcom teórie množín. Medzi osobitosti Dedekindovej teórie patrí, že nerozlišoval medzi reláciou *byť prvkom* a *byť podmnožinou*. Obe označuje termínom *časť*. (Tieto termíny jasne odlíšil ako prvý až Peano.) Preto Dedekind explicitne vylučuje prázdnu množinu (lebo v dôsledku nerozlíšenia dvoch významov termínu časť, by pripustenie existencie prázdnej množiny viedlo ku sporu). Dedekind v spomínanej práci podal aj definíciu nekonečnej množiny (ako množiny, ktorá je podobná ako jej časť) ako pomerne neobvyklý dôkaz existencie nekonečnej množiny. V implicitnom tvare použil aj axiómu výberu. Dedekindova práca je základným zdrojom Zermelovho *Skúmania o základoch teórie množín* (1908). Zermelo sa na Dedekinda často odvoláva a Gillies podrobným porovnaním Dedekindových a Zermelových formulácií ukazuje, že päť zo siedmich Zermelových axióm má pôvod u Dedekinda. Samozrejme, Zermelo rozlišuje medzi prvkom a podmnožinou, čo mu umožňuje prijať prázdnu množinu. Na rozdiel od Dedekinda sa však nepokúša existenciu nekonečnej množiny dokázať, ale ju explicitne postuluje. Odhliadnuc od týchto detailov možno Dedekinda právom označiť za predchodcu teórie množín. Po výklade teoreticko-množinového rámca Dedekindovho systému Gillies vysvetľuje výstavbu aritmetiky na tomto, podľa Dedekinda do logiky patriacom základe. Prvým krokom je **dôkaz princípu matematickej indukcie**. Takto ukázal, že to nie je nezávislý princíp, ale možno ho odvodiť z teoreticko-množinového rámca. Potom definuje pojem prirodzeného čísla, reláciu usporiadania a operácie sčítania, násobenia a umocnenia. Pre tento cieľ vymyslel novú metódu tzv. induktívnej definície, ktorá sa odvtedy stala súčasťou štandardného technického arzenálu matematiky. Dedekinovo odvodenie základov aritmetiky z logiky, aj keď svojmu tvorcovi mohlo pripadať úspešné, a rozhodne obsahovalo mnoho originálnych myšlienok, sa opiera o pojem množiny či systému, ktoré sú, ako sa ukázalo, rovnako problematické, ako aritmetika sama.

Peano, na rozdiel od Fregeho a Dedekinda nebol logicistom. Podľa neho aritmetika obsahuje mnoho primitívnych pojmov, ktoré nemožno definovať, ale ktoré treba chaakterizovať axiomaticky. Na formuláciu svojej teórie vyvinul špeciálnu logickú notáciu, ktorá síce nie je taká úplná, ako Fregeho pojmové písmo, ale je omnoho jednoduchšia, a preto moderná logická symbolika nadväzuje viac na Peana ako na Fregeho. Peana možno považovať za predchodcu formalistickej filozofie matematiky. Jeho *Arithmetices principia* z r. 1889 sú len prvým krokom projektu vybudovať celú matematiku ako formálny systém, ktorý bol uskutočnený Peanom a jeho žiakmi v osemzväzkovom diele *Formulaire de Mathématiques* (1895 až 1908). Toto dielo je napísané skoro výlučne pomocou formúl. Hilbert bol bezpochyby ovplyvnený Peanom, avšak s Hilbertom a jeho školou nastáva zásadný posun od budovania formálnych systémov ku skúmaniu ich **metamatematických vlastností**. V Peanových *Arithmetices principia* (1889) nie sú metamatematické úvahy, ale v jeho *Sul concetto di numero* z roku 1891 sú už obsiahnuté úvahy o nezávislosti jeho deviatich axióm. Nezávislosť axióm dokazuje prostredníctvom modelov. Na formulácii otázky neprotirečivosti a na jej podrobnom skúmaní má zásluhu až Hilbert.

Dve záverečné kapitoly (11 a 12) sú venované výkladu Fregeho pojmového písma, jeho realizácii logicistického programu a Russellovým paradoxom. Fregeho *Begriffsschrift* (1879) predstavuje deduktívne vybudovaný systém logiky. Jeho prvých šesť axióm spolu s pravidlom substitúcie a modus ponens predstavuje úplný systém výrokového počtu. Pri ďalšom rozvíjaní svojho systému sa Frege odchýlil od dnes štandardného predikátového počtu prvého rádu, lebo svoj systém zamýšľal ako systém logiky vyššieho rádu. Preto pripúšťa kvantifikáciu cez predikáty a skutočne takúto kvantifikáciu v diele *Begriffsschrift* aj viackrát uplatňuje. Napriek tomu však fragment jeho systému možno interpretovať ako predikátový počet prvého rádu s identitou a takto interpretovaný je úplný. Takže Fregeho systém niet čím doplniť. Aby sme pochopili, v čom je Fregeho systém zásadne nový, Gillies ho porovnáva s Booleovou *Matematickou analýzou logiky* z r. 1847. Bool patril k slávnej britskej algebraickej škole, ktorá prekvitala v 19. storočí. Booleovou ideou bolo redukovať metódy tradičnej logiky na algebraický kalkulus. Pritom však vôbec neprekračuje hranice klasickej aristotelovskej logiky, ale iba ukazuje, ako ju možno previesť na algebraické operácie so symbolmi. Naproti tomu Fregeho cieľom bolo uskutočniť svoj logicistický program. Pre tento cieľ musel premeniť všetky formy argumentácie implicitne používané v aritmetike na plne explicitné. Potreboval teda odkryť implicitnú logiku, používanú v matematike, a ako sa ukázalo, tá je omnoho bohatšia než logika aristotelovská. Zásadný rozdiel je jednak v štruktúre viet, ktoré sa nie vždy dajú zapísať v subjekt-predikátovom tvare. Napríklad nie je jasné, čo je subjektom a čo je predikátom v prípade rovnice $3 + 5 = 8$. Ešte dôležitejší je rozdiel týkajúci sa kvantifikácie. V aritmetike sa často stretávame s tvrdeniami, ktoré majú dva aj viac kvantifikátorov, čo opäť nezapadá do aristotelovskej schémy. Teda rozdiel medzi Booleom a Fregem by sa dal zhrnúť slovami, že Boole sa usiloval redukovať logiku na aritmetiku, kým Frege zasa redukovať aritmetiku na logiku. Kvôli tejto redukcii bol Frege nútený obohatiť logiku.

Po objasnení Fregeho systému z diela *Begriffsschrift* Gillies pristupuje k výkladu jeho *Základných zákonov aritmetiky* (1893 a 1903). Základný posun spočíva v známom rozlíšení zmyslu a významu. Rovnicu $a = b$ Frege chápe ako tvrdenie, že "zmysel a" a "zmysel *b*" majú rovnaký význam. Tak napríklad výrazy *2+2* a *3+1* v rovnici *2+2 = 3+1* majú odlišný zmysel, ale rovnaký význam, menovite číslo 4. Zmysel označujúceho výrazu Frege charakterizuje ako spôsob danosti objektu, v našom prípade spôsob, akým je dané číslo 4. Je zrejmé, že vo výraze *2+2* je číslo 4 dané inak ako v *3+1*. Ďalší rozdiel oproti stanovisku vyjadrenom v diele *Begriffsschrift* je, že tu je logika explicitnejšie vyššieho rádu. Napríklad v základnom zákone IIb priamo kvantifikuje funkcionálny symbol. Aby mohol explicitne definovať pojem čísla, keďže čísla považuje v istom zmysle za vlastnosti pojmov, musí vyjadriť extenziu pojmov. Preto zavádza svoj základný zákon číslo 5. Keď Frege v lete roku 1902 dokončil druhý diel *Základných zákonov aritmetiky*, muselo sa mu zdať, že úspešne zavŕšil projekt, na ktorom pracoval po celý život. Ale 16. júna 1902 mu Russell poslal list, v ktorom ukázal, že jeho systém obsahuje logický spor. Russellov list zastihol Fregeho príliš neskoro na to, aby mohol svoju knihu, zadanú do tlače ešte prepracovať. Pridal k nej však dodatok, v ktorom píše, že spor sa netýka len jeho metódy, ale každého, kto vo svojom systéme používa triedy alebo množiny. Explicitne uvádza meno Dedekinda. Gillies ukazuje ako možno Russellov paradox odvodiť z Dedekindovho systému, a ukazuje tiež, že takéto odvodenie je možné aj v Peanovom systéme. Preto je úplne oprávnená Fregeho otázka, či je vôbec možné určiť základy aritmetiky. Jasným dôkazom, že paradoxy nie sú špecifikom Fregeho prístupu, ale vyskytujú sa v oboch jeho historických alternatívach, Gillies svoju knihu končí. Ukázal v nej prechod od sebavedomých programov logicizmu či formalizmu k hlbokej kríze základov.

c. Záverečné poznámky

Prednosťou Gilliesovej knihy je množstvo citácií. Zhruba tretinu rozsahu knihy tvoria vybraté pasáže z originálnych prác, počínajúc Kantom, Millom, Fregem, Peanom, Dedekindom a končiac Zermelom a Russellom. Pritom autor uvádza nielen pasáže, ktoré sám vysvetľuje, ale dal si tú námahu a vyhľadal aj relevantné pasáže, na ktoré sa autori v citovaných pasážach odvolávajú. Napríklad vyhľadal pasáže z Kanta či Milla, ku ktorým sa Frege kriticky vyjadruje. Tak sa ukázalo, že keď Frege vyčíta Millovi, že nemôže priradiť číslo nefyzickému objektu, ako napríklad trom chutiam, tak sa jednoducho mýli, lebo Mill explicitne takéto priradenie uvádza. Takže dokonca aj Frege bojuje miestami s duchmi.

Ďaľšou prednosťou knihy je systematické zabudovávanie vykladaných diel do kontextu. Fregeho porovnáva nielen s Peanom a Dedekindom, čo už samo osebe nie je úplne štandardné, ale pri komentovaní diela *Begriffsschrift* neváhal siahnuť po Booleovi a Schröderovi. Veľmi zaujímavé je aj porovnanie Dedekinda s Zermelom alebo Peana s Hilbertom.

Kniha predstavuje asi optimálne riešenie úlohy, ktorú môže hrať filozofia v univerzitnej príprave odborníkov. Ukazuje, že namiesto nanucovania svojich tém či úsilia upútať pozornosť možno určiť témy, ktoré tvoria základy odborných disciplín a tieto zabudovať do kontextu. Koľko pekných kníh o pojme priestoru, pohybu, zákona či chemického prvku ešte len čaká na podobné spracovanie.

Ladislav Kvasz