

GÖDEL OV ONTOLOGICKÝ DÔKAZ EXISTENCIE BOHA*

Pavol ZLATOŠ

GÖDEL'S ONTOLOGICAL PROOF OF THE EXISTENCE OF GOD

The ontological proof of the existence of God from Gödel's heritage is presented and analyzed in regard to the classical ontological proofs, due to Descartes and Spinoza, and their criticism by Leibniz and Kant. Some recent works are taken into account as well, mainly the criticism of Descartes' proof by R. M. Smullyan, the emendations to Gödel's proof by C. A. Anderson and the analysis of the metaphysical pre-suppositions and biases behind the proof (and the modern European science in general) assumed from scholastic, due to P. Vopěnka.

Ešte za Gödelovho života kolovali chýry, že Majster vo svojich neskorších rokoch trávil hodne času hľadaním matematického dôkazu existencie Boha. V jeho pozostalosti sa skutočne našiel jeden list papiera s takýmto dôkazom. Dôkaz vzbudil značnú pozornosť v spoločnosti matematických logikov a jeho matematické aspekty boli vzápätí do detailov preskúmané. Taktiež sa čoskoro objavil rad článkov venovaných filozofickým aspektom Gödelovho dôkazu, najmä analýze metafyzických predpokladov ležiacich v jeho pozadí a otázke jeho presvedčivosti či spochybniteľnosti. Napokon sa tiež vyskytli pokusy Gödelov dôkaz rôznym spôsobom vylepšiť, t. j. matematickými prostriedkami preklenúť jeho prípadné slabé miesta.¹ Vcelku možno povedať, že objav Gödelovho dôkazu znovu oživil problematiku dôkazov Božej existencie, ktorá sa po Kantovej *Kritike čistého rozumu* a *Kritike súdnosti* už považovala za v zásade uzavretú.

* Príspevok vyžiadany od autora redakciou časopisu.

¹ Úvod do problematiky, ako aj čiastočný prehľad literatúry možno nájsť napr. u P. Hájka, *Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes* [6], *Magari and others on Gödel's ontological proof* [7].

Gödelov dôkaz je vlastne formalizáciou logickej esencie známeho ontologického dôkazu Descartesovho, nadväzujúceho na staršie dôkazy sv. Anselma a Dunsca Scota. Taktiež na ňom vidno zreteľný vplyv neskoršieho dôkazu Spinozovho. Je známe, že tieto dôkazy podrobili kritike viacerí myslitelia — napr. Leibniz, no hlavne Kant. Na Gödelovom dôkaze je zaujímavé najmä dômyselné využitie modálnej logiky druhého rádu, pomocou ktorej sa Gödelovi podarilo formálne bezchybne preklenúť slabé miesta spomínaných klasických dôkazov, takže — aspoň na prvý pohľad — Leibnizova ani Kantova kritika sa na jeho dôkaz nevzťahujú.

V článku sa oboznámime so základnými myšlienkami Descartesovho ontologického dôkazu, ako aj s hlavnými námietkami Leibniza a Kanta, no posledné slovo prenecháme Smullyanovi. Potom podrobne preberieme Gödelov dôkaz, pričom ukážeme, ako sa Gödel zaštilil proti Leibnizovej a Kantovej kritike, a upozorníme na niektoré súvislosti so Spinozovým dôkazom. Vzápätí kriticky preskúame i samotný Gödelov dôkaz a posúdime možnosti, ako sa vyhnúť prípadným námietkam. Napokon sa spolu zamyslíme nad filozofickými a teologickými východiskami a predpojatostami dôkazov Božej existencie z princípov čistého rozumu, dôsledkami podriadenia Boha rozumu, ako aj nad otázkou, prečo (napriek formálnej dokonalosti) nie je Gödelov dôkaz o nič presvedčivejší než tie predošlé.

1. DESCARTOV ONTOLOGICKÝ DÔKAZ

Pokusy o dôkaz Božej existencie len z princípov čistého rozumu hrali po celý stredovek významnú úlohu v rozumárskej teológii. I vďaka nim sa na pôde scholastiky vycibrilo používanie aristotelovskej logiky do značnej dokonalosti a majstrovstva. Korene týchto snáh však siahajú ešte hlboko do čias gréckej antiky, keď vo vtedajšej filozofii prevládol i neskôr v stredoveku hojne zastávaný názor, že všetko isté a nezvratné poznanie možno získať jedine prostredníctvom rozumových úvah. Úlohou filozofie potom je — práve prostredníctvom rozumových úvah — odhaliť za zdaním pravú skutočnosť a získať o nej pravé a nepochybné poznanie. Tým sa myslí spoznať v prvom rade poriadok sveta, jeho zákonitosti a nevyhnutnosti, teda to, čo je vo svete stále a nemenné. Jednotlivé úkazy a veci

sú naopak premenlivé, nestále a dočasné. Práve preto treba cez javy preniknúť k ich podstatám a za zmenami odhaliť ich zákonitosti a z nich potom spätne vyložiť jednotlivé javy i zmeny, ktorým podliehajú. Zdrojom takéhoto poznania však nemôžu byť zmysly, ktoré nás často klamú, ani naša každodenná skúsenosť. Tá môže naše uvažovanie síce podnietiť, no k pravému poznaniu môžeme dospieť len po ceste myslenia a rozumu. V tom sú skoro všetci starí myslitelia vzáčne zajedno.

Ak sa teda chceme utvrdiť v existencii Boha s nezvratnou istotou, neponechávajúcou ani ten najmenší priestor pochybnostiam akéhokoľvek druhu, musíme nevyhnutnosť existencie božskej bytosti dokázať z princípov čistého rozumu.²

Stredovekými dôkazmi existencie Boha sa v našich úvahách zaoberať nebudeme.³ Na naše účely celkom postačí, keď na tomto mieste zrekapitulujeme osnovu tzv. ontologického⁴ dôkazu Descartovho. V *Úvahách o prvej filozofii*, v Piatej úvahe, *O podstate hmoty a znova o Božej existencii*,⁵ Descartes píše:

Ak už len z toho, že môžem ideu veci vyňať zo svojho myslenia, vyplýva, že všetko to, čo poznávam jasne a zreteľne ako súčasť tej veci, skutočne k nej patrí, či už nemožno len z toho získať aj dôkaz Božej existencie?

Istotne nachádzam u seba ideu Boha, bytosti nanajvýš dokonalej, rovnako ako ideu nejakého tvaru alebo čísla. Rovnako jasne a zreteľne poznávam, že k povahe Božej patrí jeho večná existencia, ako poznávam, že to, čo demonštrujem o nejakom tvare alebo čísle, patrí tiež k podstate tohto tvaru alebo čísla. Teda, i keby nebola pravda všetko to, o čom som v týchto posledných dňoch uvažoval, musela by existencia Božia mať pre mňa pri najmenšom ten stupeň istoty, ktorý až doposiaľ mali matematické pravdy.

Toto však nie je na prvý pohľad celkom jasné, lež vyzerá ako sofizmus. Som totiž zvyknutý vo všetkých veciach rozlišovať existenciu od podstaty, a tak ľahko dospievam k presvedčeniu, že možno i existenciu Boha oddeliť

²O súvisi scholastických dôkazov Božej existencie a logicizmu (moderného smeru vo filozofii a základoch matematiky) pozri P. Zlatoš, *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou* [18], Kapitola 8, *Logika a logicizmus*.

³Zasvätenú porovnávaciu štúdiu možno nájsť u S. Sousedíka, *Jan Duns Scotus* [14], v časti *Erkurs: Vztah Anselmova a Scotova důkazu*.

⁴T. j. dokazujúceho nevyhnutnosť existencie božského súcna len z jeho pojmového vymedzenia.

⁵Pozri [4].

od jeho podstaty, takže si možno myslieť Boha ako nejestvujúceho. Ak sa však na to poďívame pozornejšie, jasne sa ukáže, že existenciu Boha možno od jeho podstaty oddeliť práve tak málo ako od podstaty trojuholníka vlastnosť, že sa veľkosť jeho troch uhlov rovná dvom pravým, alebo od idey hory ideu údolia. Je teda rovnako nezmyselné myslieť si Boha (t. j. bytosť nanajvýš dokonalú), ktorému chýba existencia, ako si myslieť horu, ktorej chýba údolie.

Ale hoci si nemôžem myslieť Boha ako nejestvujúceho, ako si nemôžem myslieť horu bez údolia, predsa z toho, že si myslím horu s údolím, ešte nevyplýva, že je na svete nejaká hora. Rovnako z toho, že si myslím Boha ako jestvujúceho, sotva vyplýva, že Boh jestvuje. Moje myslenie totiž neukladá veciam nevyhnutnosť existencie. Tak, ako si môžem predstaviť okrídleného koňa, hoci žiaden kôň nemá krídla, môžem si azda primyslieť k Bohu existenciu, i keď nijaký Boh nejestvuje.

Ale tu sa v skutočnosti ukrýva sofizmus. Veď z toho, že si nemôžem myslieť horu bez údolia, nevyplýva, že niekde existuje hora a údolie, ale len to, že horu a údolie nemožno od seba oddeliť. No z toho, že si nemôžem myslieť Boha inak než existujúceho, vyplýva, že existencia je od Boha neoddeliteľná, teda že Boh naozaj existuje. [...]

Do kritiky Descartovho dôkazu sa v tejto chvíli nebudeme púšťať. Čoskoro to totiž za nás urobia iní. Tu len upozorníme na tri zaujímavé skutočnosti.

Jednak je to postavenie, ktoré vo svojom dôkaze Descartes priznáva matematike: vari najpádnejší argument v prospech jeho dôkazu je „*prí- najmenšom ten stupeň istoty, ktorý až doposiaľ mali matematické pravdy*“. To možno chápať priam ako výzvu matematike formalizovať, a tým dotvoriť uvedený alebo nejaký iný dôkaz Božej existencie. Sám Descartes na záver *Úvah o prvej filozofii* ešte raz zaradil svoj dôkaz, tentoraz „*usporiadaný geometrickou metódou*“, čím akoby predjímaj neskorší dôkaz Spinozov z jeho *Etiky ordine geometrico*,⁶ či dokonca čiastočne vyprovokoval dôkaz Gödelov. Ešte závažnejší je však na celej veci moment, ktorý spoza celej Descartovej — no, ako čoskoro uvidíme, aj Leibnizovej a Spinozovej — argumentácie jasne presvitá: Boh novovekej racionalistickej filozofie je chápaný ako *predmet matematickej prírodovedy*.

Ďalej si všimnime, že uvedený dôkaz nie je „čiste ontologický“. Presnejšie, vieru v jeho presvedčivosť Descartes čerpá nie zo samotného dôkazu,

⁶ Pozri záverečnú časť *Důvody dokazující Boží existenci a rozdíl ducha a těla, uspořádané geometrickou metodou* v [4] a Kapitulu I, *O Bohu* v [15].

ale z empirického nálezu vlastnej introspekcie (nachádza u seba zreteľnú a jasnú ideu najdokonalejšej bytosti) a z istoty vlastného bytia, založenej na onom slávnom „*Cogito, ergo sum*“. Dôvera vo vlastné zreteľné idey je však opäť založená na nezáludnosti Božej (dokonalý, a tým i nekonečne dobrotivý Boh ho predsa nemôže klamať).⁷ Teda existencia Boha ako dokonalej bytosti je predpokladom presvedčivosti celého dôkazu. Bludný kruh sa uzavrel.

Napokon si všimnime, že Descartov dôkaz skutočne pripomína dômyselný sofizmus, a sám autor si je toho dobre vedomý. Preto preventívne prechádza do protiútok. Analyzujúc to, čo považuje za možné námietky, dospieva k záveru, že nie v jeho dôkaze, lež práve v prípadných námietkach sa nevyhnutne ukrýva nejaký sofizmus. Stojí za zmienku, že medzi Aristotelovou kritikou sofistických argumentov a podstatne mladšou Kantovou kritikou dôkazov existencie Boha možno nájsť viacero analógií a paralel.⁸

Pozrime sa teraz do *Úvahy o poznaní, pravde a ideách*, v čom vidí slabinu Descartovho dôkazu Leibniz:⁹

K hlbšiemu skúmaniu týchto vecí mi dal podnet kedysi slávny scholastický dôkaz Božej existencie, ktorý obnovil Descartes. Znie takto: *Čo vyplýva z idey nejakej veci, čiže z jej definície, to o nej možno vypovedať. Z idey Boha (čiže najdokonalejšieho bytia, nad ktoré si nemožno myslieť väčšie) vyplýva existencia. (Najdokonalejšie bytie totiž obsahuje všetky dokonalosti a medzi ne patrí aj existencia.) Bohu teda možno pripísať existenciu. V skutočnosti môžeme z tohto predpokladu vyvodíť iba to, že existencia Boha vyplýva z jeho možnosti. Definície totiž nemôžeme bezpečne používať na uzatváranie, kým nevieme, či sú reálne, t. j. či neobsahujú protirečenie. Dôvod toho je ten, že z pojmov obsahujúcich protirečenie možno vyvodíť zároveň protikladné závery, čo je absurdné. Aby som to lepšie osvetlil, uvádzam zvyčajne ako príklad najrýchlejší pohyb, lebo implikuje absurdnosť. Predpokladajme, že sa nejaké koleso točí maximálnou rýchlosťou, a predĺžme niektorý jeho polomer; kto nezbadá, že sa konečný bod predĺženého polomeru bude pohybovať rýchlejšie ako kliniec na obvode kolesa? Pohyb klinca teda nebude najrýchlejší, čo protirečí hypotéze. A predsa sa nám môže na prvý pohľad zdať, že máme ideu najrýchlejšieho*

⁷ Pozri R. Descartes, *Rozprava o metodě* [3], Část třetí, *Důkazy o jsoucnosti Boha a lidské duše, neboli základy metafysiky*.

⁸ Pozri Aristoteles, *O sofistických důkazech* [2], I. Kant, *Kritika čistého rozumu* [8].

⁹ Pozri [11], [12].

pohybu: chápeme totiž dobre, čo tým hovoríme, a predsa nemáme ani najmenšiu ideu nemožnosti. Práve tak nestačí myslieť na najdokonalejšie Bytie, aby sme mohli tvrdiť, že máme jeho ideu; v uvedenom dôkaze treba ale dokázať možnosť najdokonalejšieho Bytia alebo ju predpokladať, aby sme mohli správne uzatvárať. Hoci nič nie je viac pravdivé, ako že máme ideu Boha a že najdokonalejšie Bytie je možné, dokonca aj nutné, predsa dôkaz nie je celkom správny a už Tomáš Akvinský ho zavrhol.¹⁰

Z precíznej, vyčerpávajúcej a nie práve najľahšie zrozumiteľnej Kantovej kritiky vyberieme len jednu myšlienku. Tú možno zhrnúť do niekoľkých viet. Ontologický dôkaz predpokladá možnosť prisúdiť pojmu nejakej veci *existenciu ako vlastnosť*. No existencia nie je žiadna vlastnosť, ktorú možno (pojmu) nejakej veci prisúdiť alebo uprieť.¹¹ Lež prenechajme slovo radšej samému Kantovi. V jeho *Kritike čistého rozumu*, Tretej časti, Štvrtej kapitole, *O nemožnosti ontologického dôkazu existencie Boha*, čítame:¹²

Bytie zrejme nie je reálny predikát, t. j. pojem niečoho, čo môže pristúpiť k pojmu nejakej veci. Je to iba stanovenie nejakej veci alebo určitých vecí osebe. Pri logickom používaní tvorí len kopulu súdu. Veta *Boh je všemohúci* obsahuje dva pojmy, ktoré majú svoje objekty: Boh a všemohúcnosť. Slovo *je* nie je predikátom navyše, ale len tým, čo predikát vzťahuje na subjekt. Ak vezmем subjekt (Boha) so všetkými jeho predikátmi (ku ktorým patrí aj všemohúcnosť) a poviem: *Boh jestvuje*, alebo *Jestvuje Boh*, tak k pojmu Boha nepridávam nový predikát, ale iba stanovujem sám subjekt so všetkými jeho predikátmi, a to *predmet* vo vzťahu k môjmu pojmu. Obidva musia obsahovať presne to isté, a preto k pojmu vyjadrujúcej iba možnosť nesmie už nič pristúpiť, lebo si jeho predmet predstavujem ako naskrze daný (výrazom *je*). A tak skutočné neobsahuje viac, ako čo je iba možné. [...]

Keď si teda myslím nejakú vec s akýmikoľvek a koľkýmikoľvek predikátmi (aj pri úplnom určovaní), pridaním „*Táto vec jestvuje*“ sa k nej nič nepridá. Lebo potom by neexistovalo to isté, ako som myslel v pojme, ale viac, a nemohol by som povedať, že existuje práve predmet môjho pojmu. [...] Ak si nejakú bytosť myslím ako najvyššiu realitu (bez nedostatkov), ešte vždy ostáva otázka, či existuje, alebo nie. Lebo hoci v mojom pojme vôbec nič nechýba z možného reálneho obsahu nejakej veci, predsa len chýba

¹⁰Tým sa, prísne vzaté, myslí dôkaz Anselmov, nie Descartov.

¹¹Závažné výhrady voči tomuto druhu argumentácie, nerozlišujúcej rôzne *mody* existencie, možno najstá na už spomínanom mieste u S. Sousedíka [14] pri porovnaní Tomášovej kritiky Anselmovho dôkazu s kritikou založenou na uvedenej téze.

¹²Pozri [8].

čosi vo vzťahu k celému môjmu stavu myslenia, totiž, aby sa onen objekt dal poznať aj aposteriórne. [...] Ak však chceme existenciu myslieť iba prostredníctvom čistej kategórie, nečudo, že nemôžeme uviesť znak, ktorým by sme ju odlišili od čirej možnosti.

Všimnime si, že v závere Kantovej argumentácie už zaznieva aj kritika Leibnizovej kritiky.

Na záver si ešte predvedieme, ako vidí ontologický dôkaz náš súčasník, naslovovzatý „gödelológ“ a *enfant terrible*, Raymond Smullyan. Jeho úvahy sa síce oproti vážnym, slovným filozofom nesú v ľahšom tóne, no nie sú tým o nič menej hlboké a prenikavé — skôr naopak. Zalistujme teda v českom preklade jeho knihy *What is the Name of this Book?* kde v § 14 *Ako dokázať čokoľvek*, nájdeme pod číslom 241 *Dôkaz, že existuje jednorozec*.¹³ Stojí zato zoznámiť sa s ním celým.

Chcem dokázať, že existuje jednorozec. Nato stačí dokázať (zdanlivo) silnejšie tvrdenie, že existuje *existujúci* jednorozec. (Existujúcim jednorozcom samozrejme myslím jednorozca, ktorý existuje.) Je totiž zrejme, že pokiaľ existuje existujúci jednorozec, tak existuje jednorozec. Dokážeme teda, že existuje existujúci jednorozec. Sú práve dve možnosti:

- (1) Existujúci jednorozec existuje.
- (2) Existujúci jednorozec neexistuje.

Možnosť (2) je však zrejme rozporná. Ako by existujúci jednorozec mohol neexistovať? Tak, ako je pravda, že bežiaci jednorozec beží, existujúci jednorozec existuje.

Čo na tomto dôkaze nehrá? Je to vlastne vypreparovaná podstata slávneho Descartesovho ontologického dôkazu existencie Boha. Descartes definuje Boha ako bytosť, ktorá má vôbec všetky [dobré] vlastnosti. Podľa tejto definície [keďže vlastnosť existencie je zrejme dobrá] má Boh aj vlastnosť existencie, teda Boh existuje.

Immanuel Kant označil Descartov argument za chybný a zdôvodňoval to tým, že existencia nie je vlastnosť. Myslím, že v dôkaze je ďaleko závažnejšia chyba. Nehodlám sa tu priesť o to, či existencia je alebo nie je vlastnosť. Ukážem, že i keby existencia bola vlastnosťou, dôkaz je rovnako pochybný.

Podívajme sa najprv dôkladne na náš dôkaz existencie jednorozca. Keď poviem „Existujúci jednorozec existuje“, nie je jasné, či tým myslím, že každý existujúci jednorozec existuje, alebo že existuje vôbec nejaký existujúci jednorozec. Keby som mal na mysli prvý význam, tak by to bola

¹³Pozri [13].

pravda — samozrejme, všetci existujúci jednorožci existujú — ako by mohol existujúci jednorožec neexistovať? Ale to ešte neznamená, že ten výrok je pravdivý i v druhom význame, t. j. že musí existovať nejaký existujúci jednorožec.

Podobne je tomu s Descartovým dôkazom: vyplýva z neho v podstate len to, že každý Boh existuje, t. j. že všetko, čo vyhovuje Descartovej definícii Boha, musí mať aj vlastnosť existencie [pokiaľ je existencia dobrá vlastnosť]. Lenže to ešte neznamená, že musí vôbec nejaký Boh existovať.¹⁴

2. GÖDELOV DÔKAZ

V tejto časti čo najvernejšie zreprodujeme Gödelov dôkaz. V záujme zrozumiteľnosti však trochu narušíme lakonickosť originálu, t. j. niektoré miesta doplníme stručným vysvetľujúcim komentárom, a mierne pozmeníme jeho logickú symboliku do podoby zaužívanej u nás. Taktiež si dovoľíme malú redakčnú zmenu v dôkaze Vety 1. Dvoma zásadnejšími zásahmi, na ktoré upozorníme na príslušných miestach, si pripravíme záchytné body pre ďalšiu diskusiu.

Sledovanie dôkazu vyžaduje od čitateľa aspoň minimálnu znalosť predikátového počtu (formúl, logických spojok, premenných, kvantifikátorov, logických axióm a odvodzovacích pravidiel), t. j. logiky prvého rádu. I čitateľ neznalý tohto jazyka môže na základe „hladkého textu“ usledovať aspoň základnú kostru Gödelovej argumentácie, nevyhnutne tým však bude ukrátený o jej čaro.

Dôkaz je navyše vedený v *modálnej logike druhého rádu*. Až na jednu výnimku, ktorá sa vyskytne v dôkaze záverečného tvrdenia, kde na ňu výslovne upozorníme, si s modalitami môžeme dovoliť narábať intuitívne. Znaky modalít \Diamond , resp. \Box čítame „je možné“, resp. „je nevyhnutné“. Obe modality sú spojené podobným vzťahom ako existenčný a univerzálny kvantifikátor — nevyhnutné je to, čoho opak je nemožný, t. j. znak \Box chápeme ako skratku za $\neg\Diamond\neg$. „Druhého rádu“ znamená, že uvažujeme objekty dvojakého druhu:

¹⁴ Poznámky v hranatých zátvorkách doplnil P. Z.

- (1) Jednak základné objekty (t.j. objekty prvého rádu), ktorým tu hovoríme *súcna*.
- (2) Jednak budeme za objekty považovať aj vlastnosti základných objektov (t.j. objekty druhého rádu), ktorým hovoríme jednoducho *vlastnosti*.

Na označovanie premenných pre súcna používame malé latinské písmená x, y a pod., malé grécke písmená φ, ψ a pod. označujú premenné pre vlastnosti. Inak používame obvyklú logickú symboliku, špeciálne $\varphi[x]$ znamená, že súcno x má vlastnosť φ .

$P[\varphi]$ znamená, že φ je *dobrá* (t.j. *pozitívna*) vlastnosť.

$\varphi = \{x; \varphi[x]\}$ a $\neg\varphi = \{x; \neg\varphi[x]\}$,

t.j. každá vlastnosť je stotožnená so svojou extenziou.

Axióma 1. $P[\neg\varphi] \Leftrightarrow \neg P[\varphi]$

Teda pre každú vlastnosť φ platí:

Buď je dobrá vlastnosť φ alebo jej negácia $\neg\varphi$, ale nie obe zároveň.

Uvedená axióma je konjunkciou dvoch implikácií s podstatne odlišným významom. Aby sme mohli presne rozoznať, ktorú z nich kedy použijeme, uvedieme každú zvlášť, teda pôvodnú Gödelovu Axiómu 1 rozdelíme na dve axiómy.

Axióma 1a. $P[\neg\varphi] \Rightarrow \neg P[\varphi]$

Ak $\neg\varphi$ je dobrá vlastnosť, tak vlastnosť φ nie je dobrá.

Axióma 1b. $\neg P[\varphi] \Rightarrow P[\neg\varphi]$

Ak vlastnosť φ nie je dobrá, tak je dobrá vlastnosť $\neg\varphi$.

Axióma 2. $(P[\varphi] \ \& \ \Box(\forall x)(\varphi[x] \Rightarrow \psi[x])) \Rightarrow P[\psi]$

Vlastnosť, ktorá je nevyhnutným dôsledkom dobrej vlastnosti, je tiež dobrá.

Veta 1. $P[\varphi] \Rightarrow \Diamond(\exists x)\varphi[x]$

Ak φ je dobrá vlastnosť, tak súcno s touto vlastnosťou je možné.

Dôkaz.

Nech $P[\varphi]$ a $\neg\Diamond(\exists x)\varphi[x]$.

Potom $\Box(\forall x)\neg\varphi[x]$, a tým skôr $\Box(\forall x)(\varphi[x] \Rightarrow \neg\varphi[x])$.

Podľa Axiómy 2 z toho vyplýva $P[\neg\varphi]$.

Teda $P[\varphi]$ aj $P[\neg\varphi]$, to je však spor s Axiómou 1a.

Definícia 1. $G[x] \Leftrightarrow (\forall\varphi)(P[\varphi] \Rightarrow \varphi[x])$

Súcno x je *božské* (t.j. *God-like*), ak x má všetky dobré vlastnosti.

Axióma 3. $P[G]$

Byť božským súcnom, t.j. mať všetky dobré vlastnosti, je určite dobrá vlastnosť.

Z Vety 1 a Axiómy 3 okamžite plynú nasledujúci dôsledok:

Dôsledok. $\Diamond(\exists x)G[x]$

Boh je možný.

Týmto tvrdením sa teda Gödel poistil proti Leibnizovej námietke.

Axióma 4. $P[\varphi] \Rightarrow \Box P[\varphi]$

Predikát „byť dobrou vlastnosťou“ je vymedzený logicky, teda spĺňať ho znamená spĺňať ho nevyhnutne.

Definícia 2. $\varphi \text{ Ess } x \Leftrightarrow$
 $\varphi[x] \ \& \ (\forall\psi)(\psi[x] \Rightarrow \Box(\forall y)(\varphi[y] \Rightarrow \psi[y]))$

Vlastnosť φ je *podstatou* (t.j. *esenciou*) súcna x práve vtedy, keď x má vlastnosť φ a každá vlastnosť súcna x je nevyhnutným dôsledkom vlastnosti φ .

Veta 2. $G[x] \Rightarrow G \text{ Ess } x$

Podstatou božského súcna je práve jeho božskosť.

Dôkaz.

Nech platí $G[x]$ a ψ je vlastnosť taká, že $\psi[x]$.

Keby platilo $\neg P[\psi]$, tak z Axiómy 1b by sme dostali $P[\neg \psi]$.

Z Definície 1 potom plynie $\neg \psi[x]$, čo je spor.

Preto musí platiť $P[\psi]$.

Ale $P[\psi] \Rightarrow (\forall y)(G[y] \Rightarrow \psi[y])$ podľa Definície 1.

Ďalej $\Box P[\psi] \Rightarrow \Box (\forall y)(G[y] \Rightarrow \psi[y])$

podľa pravidiel modálnej logiky.

$\Box P[\psi]$ je však zaručené Axiómou 4.

Preto tiež $\Box (\forall y)(G[y] \Rightarrow \psi[y])$, a konečne $G \text{ Ess } x$.

Z Definície 2 relácie *Ess* vyplývajú tieto dve pozorovania:

Poznámka. $(\varphi \text{ Ess } x \ \& \ \psi \text{ Ess } x) \Rightarrow \Box (\varphi = \psi)$

$\varphi \text{ Ess } x \Rightarrow \Box (\forall y)(\varphi[y] \Rightarrow y = x)$

Každé súcno má nevyhnutne nanajvýš jednu podstatu.

Ak vlastnosť φ je podstatou súcna x ,

tak x je nevyhnutne jediné súcno s touto vlastnosťou.

Preto každá vlastnosť je podstatou nevyhnutne nanajvýš jedného súcna.

Definícia 3. $NE[x] \Leftrightarrow (\forall \varphi)(\varphi \text{ Ess } x \Rightarrow \Box (\exists y)\varphi[y])$

$NE[x]$ znamená, že x *nevyhnutne existuje z vlastnej podstaty*, presnejšie, x nevyhnutne existuje, len čo nejaká vlastnosť je jeho podstatou.

Takouto okľukou teda Gödel definuje vlastnosť *NE nevyhnutnej existencie z vlastnej podstaty*. Formálna syntax modálnej logiky druhého rádu by potom mala zaručiť, že takto definovaná existencia je naozaj *vlastnosť*, a obrniť tým jeho dôkaz aj proti Kantovej kritike.

Axióma 5. P[NE]

*Nevyhnutná existencia z vlastnej podstaty je určite dobrá vlastnosť.*¹⁵

Veta 2.5. $\diamond \Box (\exists x) G[x]$

Nevyhnutná existencia Boha je možná.

Dôkaz.

Pretože vlastnosť NE je dobrá, máme $G[x] \Rightarrow NE[x]$.

Veta 2 znie: $G[x] \Rightarrow G \text{ Ess } x$.

Teda $G[x] \Rightarrow (NE[x] \ \& \ G \text{ Ess } x)$.

Podľa Definície 3 $(NE[x] \ \& \ G \text{ Ess } x) \Rightarrow \Box (\exists y) G[y]$.

Preto $G[x] \Rightarrow \Box (\exists y) G[y]$ a tiež $(\exists x) G[x] \Rightarrow \Box (\exists y) G[y]$.

Z toho vyplýva $\diamond (\exists x) G[x] \Rightarrow \diamond \Box (\exists y) G[y]$

na základe pravidiel modálnej logiky.

No $\diamond (\exists x) G[x]$ je Dôsledkom Vety 1.

Tým sme dokázali $\diamond \Box (\exists y) G[y]$.

V pôvodnom texte sa samozrejme nenachádza nijaká Veta 2.5. Tvrdenie $\diamond \Box (\exists x) G[x]$ sa tam vyskytuje len ako súčasť dôkazu záverečnej Vety 3. Z neho potom Gödel bezprostredne uzatvára $\Box (\exists x) G[x]$, t. j. *Boh nevyhnutne existuje*. Pritom bez akéhokoľvek upozornenia použije jedno zďaleka nie intuitívne zrejme pravidlo modálnej logiky, ktoré sa dokonca ani nevyskytuje vo všetkých bežných modálnych systémoch. Je to o to pozoruhodnejšie, že predtým v dôkaze Vety 2 je použitie intuitívne zrejme pravidla $z \Gamma \Rightarrow \Delta$ vyplýva $\Box \Gamma \Rightarrow \Box \Delta$, kde Γ , Δ sú ľubovoľné formuly modálnej logiky druhého rádu, sprevádzané komentárom „by Modal logic“.¹⁶

Formálny systém modálnej logiky, do ktorého vstupujeme prijatím spomínaného zamlčaného pravidla, sa zvykne označovať S5. Pravidlo hovorí: „Čo je možné, to je nevyhnutne možné.“ Schematicky to môžeme zapísať v tvare:

¹⁵Pôvodný Gödelov komentár znie: *Being logically defined in this way, necessary existence is a positive property.*

¹⁶Analogický komentár k použitiu ekvivalentného pravidla $z \Gamma \Rightarrow \Delta$ vyplýva $\diamond \Gamma \Rightarrow \diamond \Delta$ v dôkaze Vety 2,5 dodal P. Z.

$$\diamond \Gamma \Rightarrow \square \diamond \Gamma,$$

kde Γ je ľubovoľná formula modálnej logiky druhého rádu. S použitím logického zákona transpozície, pravidiel negácie modálnych operátorov a substitúcie Γ miesto $\neg \Gamma$ ľahko nahliadneme, že toto pravidlo je ekvivalentné s pravidlom: „Čo môže byť nevyhnutné, to je nevyhnutné,“ ktoré možno schematicky zapísať v tvare:

$$\diamond \square \Gamma \Rightarrow \square \Gamma.$$

Veta 3. $\square (\exists x) G[x]$
 $G[x] \Rightarrow \square (\forall y) (G[y] \Rightarrow y = x)$

Boh nevyhnutne existuje.

Boh je nevyhnutne jediný.¹⁷

Dôkaz.

Prvé tvrdenie okamžite vyplýva z Vety 2,5 a druhého z práve spomínaných pravidiel modálnej logiky.

Druhé tvrdenie je bezprostredným dôsledkom Vety 2 a druhej časti Poznámky.

Q E D.

3. SPINOZOV DŮKAZ

Spinoza bol najobľúbenejším Einsteinovým filozofom, najmä na sklonku jeho života. Je to to isté obdobie, v ktorom Einsteina viazalo s mladším Gödelom blízke priateľstvo, pocit hlbokého intelektuálneho porozumenia a spolupatričnosti, umocnenej navyše spoločným osudom emigrantov a rovnakým materinským jazykom. Nečudo teda, že Spinozu si obľúbil i Gödel a najmä v staršom veku ho podrobne študoval. Preto náš dohad o vplyve Spinozovho dôkazu na dôkaz Gödelov zrejme nie je nepodložený.

Pozoruhodný Spinozov ontologický dôkaz existencie Boha je príliš dlhý, no hlavne príliš dômyselný a jemný nato, aby sme ho mohli aspoň trochu verne zreprodukovať na priestore únosného rozsahu. Keďže je navyše u nás knižne dostupný, nie je to ani potrebné.¹⁸ Preto tu z neho uvedieme

¹⁷Toto tvrdenie ani príslušná formula sa v rukopise nenachádzajú.

¹⁸B. Spinoza, *Etika* [15], Kapitola I, *O Bohu*.

len účelovo poňatý výrez, podriadený hlavnému zámeru tejto state, ktorým je výklad dôkazu Gödelovho. Najprv teda vyberieme spomedzi Spinozových definícií a axiém tie, ktoré sú podstatné pri dôkaze hlavného Tvrdenia 11. Potom zdôrazníme niekoľko pre nás zaujímavých tvrdení, ktoré bolo treba dokázať pred ním; ich dôkazy však vynecháme. Taktiež si všimneme (rovnako bez dôkazov) niekoľko tvrdení nasledujúcich po Tvrdení 11. Vďaka tomu, že sme Gödelov dôkaz uviedli ako prvý, t.j. obrátili historické poradie, teraz vieme, na čo sa máme v Spinozovom dôkaze sústrediť.

Definícia 1. *Príčinou samého seba* rozumiem to, čoho esencia v sebe zahŕňa existenciu, čiže to, čoho prirodzenosť možno chápať len ako existujúcu.

Definícia 3. *Substanciou* rozumiem to, čo je samo v sebe a čo je chápané zo samého seba, t.j. to, na utvorenie pojmu čoho nie je potrebný pojem nejakej ďalšej veci.

Definícia 4. *Atribútom* rozumiem to, čo rozum postihuje zo substancie ako niečo také, v čom spočíva jej esencia.

Definícia 5. *Modom* rozumiem stav substancie, čiže to, čo je v niečom inom a je aj chápané z toho iného.

Definícia 6. *Bohom* rozumiem absolútne nekonečné súcno, t.j. substanciu pozostávajúcu z nekonečného počtu atribútov, z ktorých každý vyjadruje večnú a nekonečnú esenciu.

Definícia 7. Hovoríme, že nejaká vec je *slobodná*, ak existuje iba z nevyhnutnosti svojej prirodzenosti a je iba sama sebou determinovaná k svojmu konaniu. Hovoríme, že nejaká vec je *nevyhnutná* či skôr *vynútená*, ak je k určitému vymedzenému spôsobu existencie a pôsobenia determinovaná niečim iným.

Všimneme si, že pojmy *existencie* a *esencie* (t.j. *podstaty*) Spinoza nedefinuje.

Axióma 1. Všetko, čo je, je v sebe alebo v niečom inom.

Axióma 2. To, čo nemožno pochopiť z niečoho iného, je nevyhnutné chápať z neho samého.

Axióma 3. Z danej determinovanej príčiny vyplýva nevyhnutne účinok, a naopak, ak nie je daná determinovaná príčina, je nemožné, aby nasledoval nejaký účinok.

Axióma 4. Poznanie účinku závisí na poznaní príčiny a zahŕňa ju v sebe.

Axióma 5. Veci, ktoré nemajú navzájom nič spoločné, nemožno pochopiť jednu z druhej, lebo pojem jednej nezahŕňa v sebe pojem druhej.

Axióma 6. Pravdivá idea sa musí zhodovať s tým, čoho je ideou.

Axióma 7. Ak niečo možno chápať ako neexistujúce, tak esencia tejto veci nezahŕňa existenciu.

Túto axiómu možno tiež vysloviť v zrozumiteľnejšom logicky ekvivalentnom tvare: *Ak esencia niečoho zahŕňa existenciu, tak túto vec je nemožné chápať ako neexistujúcu, t. j. je nevyhnutné chápať ju ako existujúcu.* Zdá sa, že sme práve odhalili zdroj Gödelovej inšpirácie, ktorá ho viedla k definícii vlastnosti NE *nevyhnutnej existencie z vlastnej podstaty*.

Tvrdenie 1. Prírodnosť substancie je taká, že predchádza svoje stavy.

Tvrdenie 2. Dve substancie, ktoré majú rôzne atribúty, nemajú nič spoločné.

Tvrdenie 3. Z vecí, ktoré nemajú medzi sebou nič spoločné, nemôže byť jedna príčinou druhej.

Tvrdenie 4. Dve alebo viac odlišných vecí sa od seba líši buď rôznosťou atribútov, alebo rôznosťou stavov svojich substancíí.

Tvrdenie 5. V prírode nemôžu existovať dve alebo viac substancíí s tou istou prírodnosťou alebo s tým istým atribútom.

Tvrdenie 6. Jedna substancia nemôže byť vytvorená inou substanciou.

Dôsledok. Z toho vyplýva: Substancia nemôže byť vytvorená ničím iným. V prírode totiž neexistuje nič okrem substancíí a ich stavov.

Tvrdenie 7. K prírodnosti substancie náleží existencia.

Tvrdenie 11. Boh, čiže substancia pozostávajúca z nekonečného počtu atribútov, z ktorých každý vyjadruje večnú a nekonečnú esenciu, existuje nevyhnutne.

Tu by sme sa mohli zastaviť. No keď už sme zašli tak ďaleko, nedokážeme odolať pokušeniu sledovať Spinozov výklad ešte kúsok ďalej. Bude to poučné nielen z hľadiska našej hlavnej témy, no taktiež sa nám pomaly začne črtáť cesta, ktorá Spinozu nevyhnutne viedla k *panteizmu*, t. j. stotožneniu Boha s prírodou ako celkom všetkého jestvujúceho.

Tvrdenie 14. Iná substancia než Boh nemôže ani existovať, ani byť chápaná.

Tvrdenie 15. Čokoľvek je, je v Bohu, a bez Boha nemôže ani nič byť ani byť chápané.

Tvrdenie 18. Boh je imanentnou, a nie vonkajšou príčinou všetkých vecí.

Tvrdenie 20. Existencia Boha a jeho esencia sú jedno a to isté.

Toto je hlavná odlišnosť Spinozovho a Descartovho dôkazu, ktorá sa ohlasovala už v Tvrdení 7. Kým Descartes podobným spôsobom Boha vlastne *defnuje*, a až potom dokazuje jeho existenciu, v Spinozových východných predpokladoch takýto postulát nefiguruje, aspoň nie v natoľko otvorenej podobe. Spinoza dokazuje existenciu Boha bez neho — naopak, i tento postulát dokazuje ako dôsledok svojich definícií a axióm. Z rovnakého dôvodu je Gödelov dôkaz svojou logickou výstavbou bližší Descartovmu, napriek očividnej inšpirácii Spinozom. Pri pozornejšom pohľade však možno odhaliť, že analogický postulát Spinoza rozložil do viacerých čiastkových postulátov, ktoré ukryl najmä v Definícii 6 a Axióme 7, no taktiež v Definíciách 1 a 3 a Axiómach 1 a 2.

Ďalším dôsledkom Spinozových predpokladov je prísny, nenarušiteľný determinizmus.

Tvrdenie 29. V prírode nejstuje nič náhodné, lež všetky veci sú nevyhnutne determinované prirodzenosťou Boha k určitému modu existencie a pôsobenia.

Naše odbočenie uzavrieme dôsledkom, (aj) kvôli ktorému panteizmus (nielen Spinozov, ale panteizmus vôbec — spomeňme len Giordana Bruna) upadol do takej nemilosti oficiálnych cirkevných autorít.

Tvrdenie 32. Vôľa nemôže byť nazývaná príčinou slobodnou, ale iba nevyhnutnou. *

Dôsledok a). Z toho vyplýva po prvé: *Boh nekoná zo slobodnej vôle.*

Pri spätnom pohľade na Gödelov dôkaz teraz jasne vidíme, že Boh, ktorého nevyhnutná existencia sa v ňom dokazuje, nie je živým Bohom zjaveného náboženstva. Nie je to Boh Abrahámov, Izákov a Jakubov, nie je to Hospodin zástupcov, ktorý skrze Mojžiša vyviedol svoj ľud z egyptského otroctva, — skrátka, nie je to starozákonný Jahve. A už tobôž to nie je milosrdný trojjediný Boh Evanjelíí, ktorý sa z lásky k ľuďom stal človekom, aby svojou obeťou na kríži vykúpil hriechy sveta. Tento Boh nestojí *mimo* prírody a *nad* prírodou, takže vôbec nie je jasné, či je Stvoriteľom všetkého jestvujúceho. Je to skôr Spinozov a Brunov panteistický Boh *totožný* s prírodou ako celkom všetkého súcего, podriadený zákonom rozumu a novovekej deterministickej prírodovedy. A vari je aj tým, čo Parmenides nazýva *Bytie* alebo *Jedno*.

Ak má teda Gödelov dôkaz niečo spoločného s náboženstvom, tak len s tzv. prirodzeným, a určite nie so zjaveným. Skôr ho možno chápať ako pritakanie Bytiu v absolútne krajnej¹⁹ filozofickej otázke: *Ako je možné, že vôbec niečo je, veď rovnako dobre by nemuselo byť vôbec nič?* Áno, niečo je a všetko to, čo je, nazývame *Bytím* alebo aj *Bohom*, a okrem toho, čo je, už nie je vôbec nič. Teda Bytie je a je len *Jedno* a ne-Bytie nie je. No navyše, Bytie nielen *že je*, ale *je nevyhnutne* — Bytie totiž *nemôže nebyť*. To je Parmenidova odpoveď na absolútne krajinú filozofickú otázku. My sa však skôr kloníme k záveru, že odpoveď nepoznáme. Pritakaním Bytiu (lebo len to jej dáva zmysel) a zároveň uvedením si vlastnej bezmocnosti zoči-voči tejto otázke počína zrejme od istého času každá filozofia hodná tohto mena. Nepochybne, *niečo je*, ako je to však *možné*, nevieme. Rovnako nevieme, či má vôbec zmysel uvažovať o všetkom, čo je, ako o *jednom celku*. A skôr si myslíme, že to, čo je, nie je nevyhnutne, lež rovnako dobre by mohlo aj nebyť. V tom je predsa jadro našej otázky — inak by sme si ju nekládli.

4. „LESK A BIEDA“ GÖDELOVHO DŮKAZU

Vráťme sa teraz ku Gödelovmu dôkazu. Nemožno poprieť, že je mimoriadne elegantný a dômyselný. Je to proste majstrovské dielko. Navyše spôsob, akým sa Gödel vyrovnal s Leibnizovými a Kantovými námietkami voči Anselmovmu a Descartovmu ontologickému dôkazu, budí aspoň na prvý pohľad dojem, že proti tomuto dôkazu už nemožno vzniesť nijaké rozumné výhrady. Ak si čitateľ dá tú námahu a prezrie celý dôkaz ešte raz, zistí, že Gödel sa vyhol aj onej logickej chybe, ktorú vyčíta Descartovmu dôkazu Smullyan. Nedajme sa tým však odradiť a pozrime sa na celý dôkaz trochu pozornejšie.

Začnime miestom, na ktorom je prekonaná Leibnizova námietka. Je to dôkaz Vety 1. Ako upozorňuje P. Vopěnka v *Druhých rozpravách s geometrií*,²⁰ tento dôkaz je logicky správny, no napriek tomu vzbudzuje isté rozpaky. Tie vyvoláva použitie pravidla klasickej logiky, podľa ktorého

¹⁹Žiaľ, k českému *nejzašší* či anglickému *utmost* nemáme naporúdzi plnohodnotný slovenský ekvivalent.

²⁰Pozri [17], časť *Novověká evropská věda přiznává, že je Bůh*.

vlastnosť, ktorú nevyhnutne má každé súcno, nevyhnutne vyplýva z akejkoľvek vlastnosti. Podľa Axiómy 2 potom vlastnosť, ktorú nevyhnutne má každé súcno, je dobrá. A tak spomínané rozpaky sprevádzajú aj použitie Axiómy 2, jediné v celom dôkaze. Keby sme rovno prijali za axiómu Vetu 1 miesto Axiómy 2, mohli by sme sa použitiu onoho rozpaky vzbudzujúceho pravidla vyhnúť. No tým by sme práve odkryli slabé miesto celého dôkazu, na ktoré upozorňoval Leibniz. Táto kritika však nejde na vrub Gödela, ale výlučne klasickej logiky prvého rádu. Obrazne povedané, Gödel miesto toho, aby Leibnizovu námietku prekonal, postúpil ju „vyššej inštancii“.

Pokúsme sa teraz prísť na meno onej vlastnosti, ktorú nevyhnutne má každé súcno. Pokiaľ vlastnosti chápeme extenzionálne, takáto vlastnosť je jediná. Nuž, všetky *súcna* majú zrejme spoločné len to, že *sú*, inak povedané *existujú*. Mala by to teda byť oná Kantom sproblematizovaná vlastnosť existencie. Keby Gödelovým cieľom bola iba formalizácia Descartovho dôkazu matematickými prostriedkami, mohol by vlastne už tu niekde skončiť. Z toho dôvodu sa zvyšok dôkazu javí najmä ako domyselná konštrukcia zameraná takmer výlučne na prekonanie Kantovej kritiky.

Kľúčovým miestom tejto konštrukcie je Definícia 3, v ktorej je definovaná vlastnosť *NE nevyhnutnej existencie z vlastnej podstaty*. Prípadné námietky *à la* Kant sú už vopred odvrátené, aspoň pokiaľ ide o formálnu stránku veci. Dôkaz je totiž vedený v modálnej logike *druhého* rádu, a tá umožňuje s (niektorými) vlastnosťami objektov zaobchádzať ako s objektmi.

Presnejšie, možnosť zaobchádzať s vlastnosťami ako objektmi sa využíva v samotnej definícii vlastnosti *NE*, ktorá obsahuje všeobecnú kvantifikáciu cez vlastnosti. Z obsahového hľadiska však ide o kvantifikáciu len nad oborom všetkých vlastností φ takých, že $\varphi \text{ Ess } x$. Ako vidieť z Poznámky za Vetou 2, takáto vlastnosť je nanajvýš jedna, t. j. súcno x buď nemá nijakú podstatu, alebo má jedinou podstatu. Mimochodom, všimnime si, že podľa Definície 3 každé súcno, ktoré nemá podstatu, má vlastnosť *NE*. Tento prípad sa však ďalej nevyužíva.

Čo je ešte dôležitejšie, zapojenie druhého rádu umožňuje nielen definovať vlastnosť *NE*, no najmä i s touto novou vlastnosťou zaobchádzať ako

s *objektom*. Toto sa vzápätí využíva v Axióme 5, podľa ktorej — presne v zhode s klasickým Descartovým dôkazom — nevyhnutná existencia z vlastnej podstaty je dobrá vlastnosť. Z formálneho hľadiska to však predpokladá možnosť aplikácie predikátu P na *objekt* NE.

Práve vykonané úvahy nás tak privádzajú k otázke, ktorá nám, až doposiaľ unikala a pri povrchnom štúdiu Gödelovho rukopisu by nám mohla uniknúť nadobro. O logike druhého rádu sme si zatiaľ podali len značne zjednodušené a hmlisté vysvetlenie, totiž, že „*umožňuje o vlastnostiach objektov uvažovať ako o objektoch*“. Spolu s Gödelom sme však zamlčali, či takto možno uvažovať o *všetkých* alebo len o *niektorých* vlastnostiach objektov, prípadne za akých okolností je možné jedno alebo druhé a aké to môže mať dôsledky.

Predovšetkým si treba uvedomiť, že nemá zmysel hovoriť o vôbec všetkých vlastnostiach, a už tobôž ich všetky vykladať ako objekty. Jednak to vedie k známym paradoxom, zodpovedným napríklad za krízu teórie množín z prelomu 19. a 20. storočia, jednak to pre naše účely nie je nijako potrebné. Otázka, ktorú musíme vyjasniť, znie: Ktoré formuly $\Gamma[x]$ modálnej logiky druhého rádu (jazyka, v ktorom je vedený Gödelov dôkaz) s jednou voľnou premennou x definujú *vlastnosti chápané ako objekty*? Každý jeden takýto prípad treba ošetriť zvláštnou axiómou tvaru

$$(\exists \varphi)(\forall x)(\Gamma[x] \Leftrightarrow \varphi[x]),$$

postulujúcou „objektáciu“ vlastnosti vyjadrenej formulou $\Gamma[x]$. Keďže do tejto otázky nám ešte vyústi niekoľko ďalších úvah, jej podrobnejšie posúdenie odložíme na príhodnejšiu chvíľu.

Zatiaľ sa uspokojíme s jedinou poznámkou, zameranou na odvrátenie prípadnej námietky kritického čitateľa, ktorú by mohol vzniesť hneď na začiatku podobných úvah. Ide o to, či má vôbec zmysel uvažovať o akýchkoľvek vlastnostiach (základných objektov) ako o objektoch, t. j. či je vôbec možná logika druhého rádu. Súc si vedomí, že nad touto otázkou by sme mohli filozofovať ľubovoľne dlho bez toho, že by sme dospeli k nejakému jednoznačnému záveru, dáme prednosť technickému riešeniu. Je to možné v tom zmysle, že to jednoducho funguje. Čitateľ, ktorý v takejto objektácii nachádza kde-aké skryté metafyzické predpoklady, si počína celkom oprávnenne, kým sa však začne príliš pohoršovať,

mal by si uvedomiť, že objektácia, t. j. výklad nielen vlastností základných objektov, no i vzťahov medzi nimi, vlastností takýchto vlastností a vzťahov atď. ako samostatných objektov, je jedným z vedúcich zámerov aj teórie množín, na ktorej pojmach je vybudovaná rozhodujúca časť súčasnej matematiky.²¹

Vráťme sa teraz k tým dvom miestam Gödelovho dôkazu, na ktorých sme vlastnými zásahmi už naznačili, že ich považujeme za problematické. Prvým z nich je Axióma 1, druhým použitie pravidla „čo je možné, to je nevyhnutne možné“.

Predovšetkým Axióma 1 musí v dnešnom čitateľovi nevyhnutne vyvolať značné pochybnosti. Práve preto, aby si uvedomil, čo z nej v ňom vlastne tieto pochybnosti vyvoláva, sme ju rozdelili na dve axiómy; ona sama je potom ekvivalentná s ich konjunkciou. Axiómu 1a (*vlastnosť i jej negácia nemôžu byť zároveň dobré*) sme ešte ochotní prijať, podobne ako Axiómu 2 (*vlastnosť, ktorá je nevyhnutným dôsledkom dobrej vlastnosti je tiež dobrá*) — aspoň pokiaľ dobro chápeme v ideálnom, absolútnom význame. Ťažko prijateľná, či dokonca celkom neprijateľná je pre nás Axióma 1b, postulujúca príkre rozdelenie všetkých vlastností výlučne na dobré a zlé (t. j. také, ktorých negácia je dobrá). Veď vieme, že bežné vlastnosti nie sú väčšinou ani jednoznačne dobré ani jednoznačne zlé, či dokonca táto otázka nemusí pre ne mať zmysel. Odmietnutie vízie takéhoto ostro rozdeleného, čierno-bieleho sveta sa právom považuje za jeden z popredných výdobytkov moderného myslenia.

Najjednoduchší spôsob, ako sa zbaviť nepríjemnej Axiómy 1b a tým i pochybností, ktoré vrhá na Gödelov dôkaz, sme vlastne už nepriamo naznačili. Táto axióma sa totiž v celom dôkaze používa jediný raz, a to v dôkaze Vety 2, na odvedenie záveru $P[\psi]$ z predpokladov $G[x]$ a $\psi[x]$. Lež ak mierne pozmeníme Definíciu 1 vlastnosti G *byť božským súčnom* do podoby

$$G[x] \Leftrightarrow (\forall \varphi)(P[\varphi] \Leftrightarrow \varphi[x]),$$

²¹Pozri P. Vopěnka, *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín* [16], Kapitola 3, *Vedúce závery teórie množín*, prípadne P. Zlatoš [18], Kapitola 2, *Postavenie teórie množín v súčasnej matematike a jej vedúce závery*.

plynie požadovaný záver z uvedených predpokladov okamžite. Inak môže ostať všetko bezo zmeny. Pritom pozmenená Definícia 1 je stále prijateľná: božské súcno nielen má všetky dobré vlastnosti, no taktiež každá vlastnosť, ktorú má božské súcno, je už len preto dobrá. Zdá sa teda, že uvedená námietka je celkom nepodstatná: Gödelov dôkaz možno bez zásadných zmien ľahko upraviť tak, aby sme sa jej vyhli.

Možno to niekoho prekvapí a niekoho nie, no ono spomínané čierno-biele rozdelenie sveta je tak hlboko zakorenené vo zvyšných axiómách a definíciách Gödelovho dôkazu, že aj po uvedenej úprave možno tvrdenie Axiómy 1b dokázať ako ich dôsledok.

Naozaj, keďže už vieme, že nevyhnutne existuje nejaké (dokonca jediné) božské súcno x , tak pre ľubovoľnú vlastnosť φ platí $\varphi[x]$ alebo $\neg\varphi[x]$. Podľa pozmenenej Definície 1 v prvom prípade máme $P[\varphi]$, v druhom $P[\neg\varphi]$.

Podstatnú úlohu v tomto dôkaze však zohral *zákon vylúčenia tretieho*, teda klasický logický princíp odmietaný celým jedným vývojovým prúdom matematiky (tzv. intuicionizmom), ktorý možno najlepšie zdôvodniť práve na základe predstavy raz a navždy zavŕšeného, strnulého, nemenného, mechanisticky determinovaného a dokonalým, vševedúcim pozorovateľom nazeraného sveta.²² A tak sme sa ani uvedeným vylepšením našej námietky nezbavili. Naopak, utvrdili sme sa v tom, že jej zdroj tkvie v Gödelovom dôkaze tak hlboko, že ho ani nevieme presne a jednoznačne lokalizovať. Lokalizovať ho v samotnom dôkaze sa nám ani nemôže podariť — týmto zdrojom sú totiž niektoré predpojatosti novej európskej vedy prevzaté od scholastiky. Keďže tento zdroj je spoločný viacerým problematickým miestam Gödelovho dôkazu, vrátime sa k nemu až v závere našich úvah.

Na inú — a dodajme hneď — nie príliš dôstojnú možnosť, ako zo spomínaných ťažkostí vycúvať, upozornil P. Vopěnka.²³ Vôbec nemusíme trvať na tom, že vlastnosti chápané ako objekty už zahŕňajú všetky možné vlastnosti (vyjadriteľné jazykom Gödelovho dôkazu), dokonca ani na tom, že ich zahŕňajú mnoho. Naopak, za objekty si dovoľíme prehlásiť

²² Pozri napr. P. Zlatoš [18], Kapitola 9, *Intuicionizmus*.

²³ Pozri už spomínanú časť v [17].

len tie vlastnosti, ktoré vyhovujú spomínanému čierno-bielemu princípu, čiže Axióme 1. Z technického hľadiska však takto postupovať nemôžeme, t. j. nemôžeme Axiómu 1 zmeniť na definíciu „vlastností-objektov“, lebo, aby sme v nej vystupujúci predikát P mohli aplikovať na nejakú vlastnosť, musíme mať už vopred zaručené, že táto vlastnosť je objekt. To nás opäť privádza k už nastolenej otázke, ktoré formuly $\Gamma[x]$ definujú vlastnosti-objekty.

Ako sme už naznačili, k riešeniu tejto otázky môžeme zaujať dve krajné stanoviská, prípadne hľadať nejakú strednú cestu medzi nimi. Prvé z nich je vedené zámerom, charakteristickým aj pre teóriu množín, vyložiť si čo možno najviac vlastností ako objekty. Pri druhom si zasa budeme vykladať ako objekty iba minimum vlastností, nevyhnutné pre potreby nášho dôkazu. Keďže túto otázku ponechal Gödel otvorenú, môžeme sa len dohadovať, akú cestu by sám zvolil.

Jediné, čo možno z rukopisu vyčítať je, že obor vlastností-objektov je uzavretý na operáciu negácie; je to zrejmé z poznámky na začiatku celého dôkazu, a taktiež je to nevyhnutné kvôli možnosti sformulovať Axiómu 1, prípadne 1a. Teda v Gödelovom rukopise je zamlčaná axióma

$$(\forall \varphi)(\exists \psi)(\forall x)(\psi[x] \Leftrightarrow \neg \varphi[x]).$$

Minimálny obor vlastností-objektov musí ešte zahŕňať vlastnosti G a NE ; príslušné zamlčané axiómy už vypisovať nebudeme. Aj bez toho je zrejmé, že by pôsobili značne umelo a — ako to už býva — boli by z psychologického hľadiska omnoho ťažšie prijateľné než nejaké všeobecné princípy, z ktorých síce vyplývajú, no nie je z nich vopred jasný zámer, ktorému slúžia. Vzhľadom na syntaktickú zložitosť formúl definujúcich vlastnosti G , a najmä NE , si len ťažko možno predstaviť nejaký rozumný, prijateľný všeobecný princíp existencie vlastností-objektov, ktorý by zaručil ich objektáciu, okrem princípu postulujúceho objektáciu *každej* formuly $\Gamma[x]$. Prijatie takéhoto princípu sa zdá mať za následok neprijateľnosť Axiómy 1, presnejšie jej časti 1b. Dôkaz si potom vynucuje spomínanú zmenu Definície 1, takže — ako sme už videli — v konečnom dôsledku sa Axiómy 1b aj tak nezbavíme.

Vycúvať po cestičke naznačenej Vopěnkom by teraz znamenalo tvrdiť, že formulami $\Gamma[x]$ jazyka modálnej logiky druhého rádu, v ktorom je

vedený celý dôkaz, možno vyjadriť výlučne také vlastnosti, pre ktoré je po objektácii splnená Axióma 1. Proti takejto téze možno ťažko vzniesť nejaký argument, najmä keď si uvedomíme, že tento jazyk obsahuje len štyri základné predikátové symboly: jednak je to „utajený“ dvojmiestny predikát spĺňania, do ktorého vstupujú vlastnosti φ a súcna x , značený $\varphi[x]$,²⁴ ďalej jednomiestny predikát „*byť dobrou vlastnosťou*“, do ktorého vstupujú vlastnosti-objekty φ , značený $P[\varphi]$, a konečne dva predikáty rovnosti — medzi súcniami resp. medzi vlastnosťami-objektmi —, značené $x = y$ resp. $\varphi = \psi$.²⁵ Zdá sa, že v takomto jazyku sotva možno vyjadriť „mnoho“ vlastností, takže téza, že všetky takéto vlastnosti budú viac-menej „čierno-biele“, t. j. platí pre ne Axióma 1, je stále udržateľná. Na druhej strane, toto je zrejme *jediný* argument v prospech spomínanej tézy. A vzhľadom na bohatosť teórie množín a podobnosť „skrytého“ predikátu spĺňania $\varphi[x]$ a predikátu množinového náležania $x \in \varphi$ argument prinajmenšom problematický.

Navýše, ako si všimli Jiří Polívka a J. H. Sobel,²⁶ objektácia všetkých vlastností $\Gamma[x]$ má za následok *kolaps modalít*, t. j. v takomto systéme pre ľubovoľnú formulu $\Gamma[x]$ platí

$$\diamond \Gamma[x] \Leftrightarrow \Gamma[x] \Leftrightarrow \square \Gamma[x].$$

Na prvý pohľad ide len o radikálne zjednodušenie, takže by nás to nemuselo trápiť. Práve toto zjednodušenie však celému dôkazu ubera rovnako radikálne na presvedčivosti. Dômyselné použitie modálnej logiky sa tak zrazu mení na lacné pozlátko, ktoré môže dodať dôkazu nanajvýš falošného lesku. Preto, ak chceme Gödelov dôkaz nejako zachrániť, musíme sa kolapsu modalít — a pokiaľ by sme už nič nezmenili, tak aj princípu plnej objektácie formúl $\Gamma[x]$, — vyhnúť za každú cenu.

Jestvuje viacero technických riešení tohto problému.²⁷ Z nich najpod-

²⁴ Z dôvodov „odtajenia“ by zrejme bolo primeranejšie miesto $\varphi[x]$ písať napr. $x \in \varphi$, aby sme odlíšili tento dvojmiestny vzťah medzi súcniami x a vlastnosťami-objektmi φ od „obyčajného“ spĺňania formúl $\Gamma[x]$ súcniami x . Zachovávame však označenie originálu.

²⁵ Znak rovnosti sa niekedy zvykne považovať za *logický* symbol daného jazyka a nie za znak základného predikátu.

²⁶ Pozri P. Hájek [6], [7].

²⁷ Jedným z nich je napríklad tzv. *schéma opatrnej objektácie* (*cautious comprehension scheme*) — pozri P. Hájek [7].

netnejšie podal C. A. Anderson.²⁸ Jeho riešenie zachováva princíp plnej objektácie vlastností $\Gamma[x]$, kolapsu modalít sa však vyhne nahradením Axiómy 1 Axiómou 1a (t.j. vypustením Axiómy 1b, čo je opäť vítané) a inou modifikáciou Definície 1, ktorá sa od jej už spomínanej modifikácie na prvý pohľad líši len nepatrne — vyzerá takto:

$$G[x] \Leftrightarrow (\forall \varphi)(P[\varphi] \Leftrightarrow \Box \varphi[x]).$$

Podľa tejto definície božské súcno nielen má každú dobrú vlastnosť, ale má ju dokonca *nevyhnutne*, a tiež naopak, každá vlastnosť, ktorú má božské súcno nevyhnutne, je už z toho dôvodu dobrá. O prípadných vlastnostiach božského súcna, ktoré nemá nevyhnutne, sa nič nehovorí. Zrejme táto definícia vlastnosti G je rovnako prijateľná ako obe predošlé.

Hlavné prekvapenie nás však ešte len čaká: Za princípu plnej objektácie a pri uvedenej modifikácii Definície 1 je nevyhnutná existencia Boha dokázateľná už len z Axióm 1a, 2 a 3. Axiómy 1b, 4 a 5 sa stávajú nadbytočnými.

Naozaj, Dôsledok $\Diamond(\exists x)G[x]$, t.j. *Boh je možný* sa dokáže rovnako ako v pôvodnom dôkaze.

Kedže platí $P[G]$, máme $G[x] \Rightarrow \Box G[x]$.

$G[x] \Rightarrow (\exists x)G[x]$ je logická axióma predikátového počtu.

Z toho podľa zrejmeho pravidla modálnej logiky vyplýva

$$\Box G[x] \Rightarrow \Box(\exists x)G[x].$$

Preto $G[x] \Rightarrow \Box(\exists x)G[x]$, a tiež $(\exists x)G[x] \Rightarrow \Box(\exists x)G[x]$.

Na základe modálnej logiky potom

$$\Diamond(\exists x)G[x] \Rightarrow \Diamond\Box(\exists x)G[x].$$

Kedže máme $\Diamond(\exists x)G[x]$, plynie z toho $\Diamond\Box(\exists x)G[x]$.

Podľa pravidla „čo môže byť nevyhnutné, to je nevyhnutné“,

platí $\Diamond\Box(\exists x)G[x] \Rightarrow \Box(\exists x)G[x]$.

Teda konečne $\Box(\exists x)G[x]$, t.j. *Boh nevyhnutne existuje*.

Uvedomme si ešte raz a poriadne, ako sme vlastne dokázali Gödelov záver $\Box(\exists x)G[x]$. Nielen že sme vystačili bez Axióm 1b, 4 a 5, ale nepotrebovali sme ani Definície 2 a 3. Teda všetky jemné úvahy založené

²⁸ Some emendations to Gödel's ontological proof [1], pozri tiež P. Hájek [7].

na Definícii 2 vzťahu $\varphi \text{ Ess } x$ (*vlastnosť φ je podstatou súcna x*), no hlavne na Definícii 3 vlastnosti NE (*nevyhnutnej existencie z vlastnej podstaty*) a descartovskej Axióme 5 P[NE] (*nevyhnutná existencia z vlastnej podstaty je dobrá vlastnosť*), ktoré sme považovali za kľúčový moment Gödelovho dôkazu, umožňujúci prekonať Kantovu kritku, sa ukázali zbytočné. Pritom Andersonom vylepšený dôkaz je určite presvedčivejší než pôvodný Gödelov. Popri tom, že nepoužíva problematickú Axiómu 1b, zbavuje nás úlohy posudzovať oprávnenosť Axiómy 4 $P[\varphi] \Rightarrow \Box P[\varphi]$ (*každá dobrá vlastnosť je nevyhnutne dobrá*). Navyše je presnejší, lebo explicitne špecifikuje princíp plnej objektácie, čím zo všetkých možností riešenia tejto otázky vyberá práve to, ktoré najvernejšie zodpovedá duchu Gödelovho dôkazu.

Zostáva jediné problematické miesto, ktoré majú Gödelov aj Andersonov dôkaz spoločné. Tým je použitie spomínaného pravidla modálneho systému $S5 \Diamond \Gamma \Rightarrow \Box \Diamond \Gamma$ (*čo je možné, to je nevyhnutne možné*). Bez tohto pravidla sme schopní dokázať nanajvýš $\text{Vetu } 2,5 \Diamond \Box (\exists x) G[x]$ (*je možné, že Boh nevyhnutne existuje*). Bez uvedeného pravidla však z toho nielen že nevyplýva nevyhnutná existencia Boha, ale ani to, že Boh vôbec existuje (aspoň náhodne, keď už nie nevyhnutne). Spôsob, ako sa zaobísť bez tohto pravidla, sa nám zatiaľ ani len nečrtá na obzore. A tak nad celým dôkazom zostáva visieť tieň kritiky nie Kantovej lež Leibnizovej, hoci táto vo svojej pôvodnej podobe — ako sme už ukázali — bola odkázaná na „vyššiu inštanciu“ klasického predikátového počtu. Presnejšie možno povedať, že Leibniz skôr vytušil, než jasne vystihol slabinu Descartovho i neskoršieho Gödelovho dôkazu, ktorá spočíva hlbšie v nuansách modálnej logiky, než si uvedomoval a mohol vôbec uvedomovať. Na druhej strane, ako vyplynie z analýzy, ktorá nasleduje, spomínané modálne pravidlo sa plne zhoduje s duchom Leibnizovej filozofie, takže on sám by proti Gödelovmu dôkazu svoju námietku sotva uplatnil.

Metafyzické predpoklady skryté v pozadí tohto modálneho pravidla i celého ontologického dôkazu presne vystihol P. Vopěnka.²⁹ Bude zaujímavé — nielen kvôli plynulosti a zrozumiteľnosti — odcitovať z jeho výkladu trochu viac, než bezprostredne súvisí s použitím spomínaného pravidla.

²⁹Pozri už spomínanú časť v [17].

Leckterý čtenář si možná myslí, že vliv teologie na novověkou evropskou vědu přinejmenším zveličujeme. Ostatně řada vědců není ochotna připustit, že by náboženství mohlo mít na vědu vůbec nějaký vliv, a pokud ano, pak je jen brzdou jejího vývoje.

Novověká věda však čerpá z tolika předpojatostí zděděných ze scholastiky, že je schopná zpětně dokázat, že je nutné, aby byl Bůh. Nejde pochopitelně o nějakého novodobě vykládaného Boha, ale o takového, který odpovídá poměrně jednoduchým středověkým představám. Avšak právě vědecký důkaz nutnosti takového Boha dosvědčuje, o jaké předpojatosti se novověká věda opírá, i když si toho není vědoma.

[...]

Předpokládejme nyní — spolu s novověkou přírodovedou —, že reálný svět má pevný, trvalý, neměnný a zcela určitý řád. Potom však nejen nutnosti, ale i možnosti jsou tímto řádem určeny, neboť možné je to, čemu řád reálného světa nebrání, aby bylo uskutečněno. Jinými slovy, co je možné, to je již pevně a trvale zachyceno v řádu reálného světa, to je tímto řádem jakožto možné již předurčeno. Krátce řečeno, *co je možné, to je nutně možné*. [...]

[...]

Jak jsme již uvedli, Kantovu námitku proti ontologickému důkazu Gödel obešel, a to vskutku mistrovsky důmyslnou definicí vlastnosti NE a pak ovšem užitím pravidla „*co je možné, to je nutně možné*“, jehož přijetí se opírá o trvalost a neměnnost řádu reálného světa. Proto také Bůh, o něhož v této úvaze šlo, je jaksi světský; je to jeden z objektů reálného světa. Je to zkrátka takový Bůh, z něhož své předpojatosti převzala novověká evropská přírodověda. Je všemohoucí, pokud ovšem všemohoucnost považujeme za dobrou vlastnost. Pokud za dobrou vlastnost považujeme vševědoucnost, pak je vševědoucí.

Je dobře známo, že vševědoucnost a všemohoucnost jsou navzájem ve sporu. To ale znamená, že toliko jednu z těchto vlastností můžeme považovat za dobrou — a takového budeme mít Boha, která z nich to bude. O tomto sporu věděli pochopitelně již středověcí teologové a ti, kteří podřizovali Boha rozumu, tím byli přiváděni do nemalých rozpaků; jejich pokusy o řešení tohoto sporu příliš úspěšné nebyli. Nám však nyní nejde o to, jaký je Bůh, ale jaká je novověká přírodověda, a ta si časem začala přisvojovat obě tyto vlastnosti.

[...]

Není možný Bůh, který je podřízen rozumu,³⁰ či lépe řečeno, nemá právo

³⁰Toto je vari najhlbšia a — keďže odporuje napr. autorite sv. Tomáša Akvinského — aj najodvážnejšia z myšlienok Mikuláša Kuzánskeho, vyslovených v jeho diele *O učenej nevedomosti* [10]. (Poznámka P. Z.)

nazývat se Bohem takové jsoúcnó, které je podřízeno rozumu. Rozum nestojí nad Bohem, ale Bůh stojí nad rozumem.

Nakonec ještě poznamenejme, že celý důkaz nelze dualizovat, to znamená dokázat obdobným způsobem, že je nutné, aby byl ďábel. To by bylo možné jen tehdy, kdybychom byli považovali za něco špatného.

Tesne pred koncom by sme sa mali pokúsiť vzťahnúť Kuzánskeho myšlienku o nemožnosti podriaďiť Boha rozumu aj na vlastné úvahy. Veď napríklad všetky námietky voči (nielen) Gödelovmu dôkazu, ktoré sme uviedli, boli vedené takmer výlučne z pozícií rozumu. Je teda možné, že hoci by ontologický dôkaz pred súdom rozumu neobstál, nie je tým jednáko vyvrátený? Zas len *rozum* nám hovorí, že je to nezmysel. A tak si spomeňme, ako sme v predošlom článku umne zdôvodnili, že Boh Gödelovho dôkazu nie je starozákonným Bohom. Avšak tento Boh sám zjavuje Mojžišovi svoje meno Jahve: „SOM, KTORÝ SOM.“³¹ Nie je už v samotnom Božom mene obsiahnutá esencia ontologického dôkazu?

Celkom na záver sa pokúsme zabudnúť na všemožné rozumárske analýzy a z nich vyplývajúce prípadné výhrady voči celému dôkazu a položme si otázku: *Čo nám Gödel vlastne dokázal svojim dôkazom?*

Ak sme neveriaci, tak táto otázka znie, či nás Gödelov dôkaz (v prípadnom Andersonovom vylepšení) *neobrátí na vieru v Boha*. S plným vedomím riskantnosti a ošemetnosti pokusov odpovedať za niekoho iného a za mnohých naraz si autor jednáko dovoľí tvrdiť, že asi sotva.

Ak sme veriaci, pýtame sa tým, či nás Gödelov dôkaz *utvrdil v našej viere*, čo presnejšie znamená, či sú pre nás (vyslovené i zamlčané) Gödelove (prípadne Andersonove) axiómy a definície, ako aj logické axiómy a pravidlá systému *S5* modálnej logiky druhého rádu ľahšie prijateľné a uveriteľné než samotné tvrdenie o nevyhnutnosti Božej existencie. Azda teraz aspoň jasne vidíme, aká úbohá by bola naša viera, keby tomu bolo tak.

Matematicko-fyzikálna fakulta
Univerzita Komenského
Mlynská dolina
842 15 Bratislava
e-mail: zlatos@fmph.uniba.sk

³¹Ex 3,14.

LITERATÚRA

- [1] ANDERSON, C. A. (1990): Some emendations to Gödel's ontological proof. In: **Faith and Philosophy** 7.
- [2] ARISTOTELES (1978): **O sofistických důkazech**. Academia, Praha.
- [3] DESCARTES, R. (1947): **Rozprava o metodě**. Jan Laichter, Praha.
- [4] DESCARTES, R. (1970): **Úvahy o první filosofii**. Svoboda, Praha.
- [5] GÖDEL, K.: **Ontological proof**. Nedatovaná xerokópia.
- [6] HÁJEK, P. (1995): Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes (betreffend Gödels ontologischen Beweis). In: Köhler, E. – Schimanowich, M. (eds.): **Wahrheit und Beweisbarkeit — Leben und Werk Kurt Gödels**. Wien.
- [7] HÁJEK, P. (1996): Magari and others on Gödel's ontological proof. In: Ursini, A., Aglianò, P. (eds.): **Logic and Algebra**. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.
- [8] KANT, I. (1979): **Kritika čistého rozumu**. Pravda, Bratislava.
- [9] KANT, I. (1975): **Kritika soudnosti**. Odeon, Praha.
- [10] KUZÁNSKY, M. (1979): **O učenej nevedomosti**. Pravda, Bratislava.
- [11] LEIBNIZ, G. W. (1956): **O reforme vied**. Slovenská akadémia vied, Bratislava.
- [12] LEIBNIZ, G. W. (1982): **Monadologie a jiné práce**. Svoboda, Praha.
- [13] SMULLYAN, R. M. (1986): **Jak se jmenuje tahle knížka?** Mladá fronta, Praha.
- [14] SOUSEDÍK, S. (1989): **Jan Duns Scotus, doctor subtilis, a jeho čeští žáci**. Vyšehrad, Praha.
- [15] SPINOZA, B. (1977; 1986): **Etika**. Svoboda, Praha; Pravda, Bratislava.
- [16] VOPĚNKA, P. (1989): **Úvod do matematiky v alternativnej teórii množín**. Alfa, Bratislava.
- [17] VOPĚNKA, P. (1991): **Druhé rozpravy s geometrií**. Focus a Práh, Praha.
- [18] ZLATOŠ, P. (1995): **Ani matematika si nemůže být istá sama sebou — Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách**. Iris, Bratislava.