

## Z LOGICKEJ SYNTAXE A SÉMANTIKY (VIII)

Pavel CMOREJ

20. **Lambda-operátor a jednoargumentové lambda-predikáty.** V kapitole o predikátoch sme poukázali na rozmanitosť predikátových výrazov prirodzeného jazyka a na možnosť utvoriť predikát z ľubovoľného výroku odstránením niekoľkých výskytov niektorých jeho individuových mien. Napríklad z výroku

(1) Jano napísal novelu a venoval ju Eleonóre

dostaneme predikát odstránením mena „Jano“ alebo mena „Eleonóra“ alebo obidvoch. Nie každý z takto získaných výrazov je z gramatického hľadiska správne utvorený a často je iba akýmsi fragmentom pôvodného výroku, ako napr. „Jano napísal novelu a venoval ju ...“. Ak chceme, aby bol tento fragment zrozumiteľnejší a logicky priezračnejší, musíme ho preformulovať (napr. na výraz „byť človekom, ktorému Jano venoval svoju novelu“), čo nie je v prirodzenom jazyku vždy ľahké a pri zložitejších výrazoch priam nemožné.

V logike sa zložené predikátové výrazy konštruujú pomocou *výrokových* foriem a tzv. **lambda-operátora**, ktorý budeme označovať symbolom  $\lambda$ . Všimnime si najprv nasledujúci príklad. Predpokladajme, že výraz *Sl* signifikuje vlastnosť byť Slovákom, *Ba* – vlastnosť bývať v Austrálii a že *x* je premenná, ktorej obor premennosti je množina všetkých ľudí. Keď pred *výrokovú* formu  $Sl(x) \wedge Ba(x)$  umiestníme výraz  $(\lambda x)$ , získame predikát signifikujúci vlastnosť, ktorá prislúcha každému človeku slovenskej národnosti bývajúcemu v Austrálii a *len takému človeku*. Utvoríme tak zložený predikát

(2)  $(\lambda x)(Sl(x) \wedge Ba(x))$ .

Denotátom tohto predikátu je množina tých prvkov (z oboru premennosti premennej) *x*, pre ktoré platí, že  $Sl(x) \wedge Ba(x)$ . Keďže oborom premennosti *x* je množina ľudí, predikát (2) môžeme čítať aj takto: *človek*, ktorý je Slovákom a býva v Austrálii. Keby oborom premennosti *x* bola množina žien (prípadne množina

*fajčiarov*), do prirodzeného jazyka by sme (2) mohli preložiť výrazom „žena, ktorá je Slovenka a býva v Austrálii“ (prípadne výrazom „*fajčiar*, ktorý je Slovák a býva v Austrálii“). Prvým výrazom týchto prekladov je výraz denotujúci obor premennosti premennej  $x$  (ktorý sa môže skladať z viacerých slov, napr. „prirodzené číslo, ...“, „nezáporné reálne číslo, ...“). Výraz (2) je jednoargumentový predikát signifikujúci vlastnosť, ktorá prislúcha určitému objektu  $o$  práve vtedy, keď  $Sl(o) \wedge Ba(o)$ , čiže práve vtedy, keď objekt  $o$  spĺňa formu  $Sl(x) \wedge Ba(x)$ . Do rozsahu tejto vlastnosti patrí každý prvok z oboru premennosti premennej  $x$ , ktorý je Slovák a býva v Austrálii.

Naznačeným spôsobom možno získať jednoargumentový predikát z *ľubovoľnej výrokovkej* formy, ktorá obsahuje voľnú premennú (na počte jej výskytov nezáleží). To znamená, že ak  $F$  je výroková forma, v ktorej sa voľne vyskytuje práve premenná  $\pi$ , tak  $(\lambda\pi)F$  je jednoargumentový predikát, ktorý signifikuje nejakú vlastnosť a denotuje jej rozsah. Výrazy tvaru  $(\lambda\pi)F$  budeme nazývať **lambda-predikátmi**. Objekt  $o$  má vlastnosť  $(\lambda\pi)F$  práve vtedy, keď spĺňa formu  $F$ . Keďže signifikátom predikátu  $(\lambda\pi)F$  je vlastnosť a jeho denotátom určitá množina, niekedy sa číta a interpretuje ako „vlastnosť tých  $x$ , pre ktoré platí  $F^x$ “ a niekedy ako „množina tých  $x$ , pre ktoré platí  $F^x$ “. Extenziálna sémantika jednoznačne uprednostňuje druhý spôsob čítania a interpretácie. V intenzionálnej sémantike sa vlastnosti zvyčajne označujú inými výrazmi ako množiny. Od týchto jemnejších dištinkcií budeme ďalej abstrahovať a lambda-výrazy čítať buď neutrálnym spôsobom, o ktorom sme sa zmienili pri interpretácii predikátu (2), alebo ľubovoľným z dvoch ďalších spomenutých spôsobov.<sup>1</sup>

Pomocou lambda-operátora môžeme teraz z výroku (1) skonštruovať príslušné predikátové výrazy tak, že najprv z neho utvoríme výrokovú formu, ktorú potom spojíme s lambda-operátorom a individuovou premennou vyskytujúcou sa vo forme. Dostaneme tieto zložené predikáty:

- (3)  $(\lambda x)(x \text{ napísal novelu a venoval ju Eleonóre})$ ,
- (4)  $(\lambda x)(\text{Jano napísal novelu a venoval ju } x)$ ,
- (5)  $(\lambda x)(x \text{ napísal novelu a venoval ju } x)$ .

Aké vlastnosti signifikujú predikáty (3) – (5)? Predpokladajme, že výrazy „Jano“, „Eleonóra“ sú vlastné mená *určitých* osôb. Za tohto predpokladu predikát (3) signifikuje vlastnosť prislúchajúcu každému individu  $x$ , ktoré napísalo nejakú novelu a venovalo ju Eleonóre, teda vlastnosť, ktorú možno

v prirodzenom jazyku vyjadriť zloženým výrazom „byť človekom, ktorý napísal novelu a venoval ju Eleonóre“, alebo jednoducho výrazom „napísať novelu a venovať ju Eleonóre“. Signifikátom predikátu (4) je vlastnosť prislúchajúca individuám, ktorým Jano venoval niektorú zo svojich noviel. V prirodzenom jazyku by sme túto vlastnosť mohli vyjadriť výrazom „byť človekom, ktorému Jano venoval svoju novelu“. Vlastnosť zodpovedajúcu predikátu (5) má každý prvok z oboru premennosti premennej  $x$ , ktorý napísal novelu a venoval ju sebe samému. Je to teda vlastnosť byť človekom, ktorý napísal a sebe venoval nejakú novelu. Hoci vo výrazoch (3) – (5) sa vyskytuje premenná, každému z nich zodpovedá v prirodzenom jazyku výraz signifikujúci *určitú* vlastnosť. Určenie tejto vlastnosti nezávisí od ohodnotenia premenných, a teda ani od hodnôt, ktoré pri ohodnoteniach nadobúda premenná  $x$ . Čitateľ už zrejme tuší, čo z toho vyplýva. Porovnajme teraz predikáty (3) – (5) s výrazom

(6)  $(\lambda x)(x \text{ napísal novelu a venoval ju (osobe) } y)$ ,

ktorý možno do slovenčiny preložiť výrazom „človek, ktorý napísal novelu a venoval ju tejto osobe (jej)“. Kým nevieme, na koho sa vzťahuje výraz „táto osoba“ („ona“ v tvare „jej“), nemôžeme určiť signifikát ani denotát predikátového výrazu (6). Keď „touto osobou“ bude ministerka slovenskej vlády O. Keltošová (ktorú nejakým spôsobom vyčleníme), uvedený predikát bude signifikovať vlastnosť byť človekom, ktorý napísal novelu a venoval ju O. Keltošovej a keď „touto osobou“ bude podpredsedníčka slovenskej vlády K. Tóthová, zodpovedajúcou vlastnosťou bude vlastnosť byť človekom, ktorý napísal novelu a venoval ju K. Tóthovej. Ide zrejme o dve odlišné vlastnosti, pretože niekto môže mať jednu a nemusí mať druhú vlastnosť. To, pravda, neznamená, že by tieto vlastnosti nemohol mať jeden a ten istý spisovateľ, napr. autor, ktorý by jednu zo svojich noviel venoval O. Keltošovej a jednu K. Tóthovej. Z uvedenej úvahy je zrejme, že výraz (6) sám osebe nesignifikuje nijakú konkrétnu vlastnosť, ani nedenotuje nijakú množinu individuí. Je to predikátová *forma* nadobúdajúca určitú hodnotu (v tomto prípade množinu individuí) až po priradení nejakej hodnoty jej premennej  $y$ . Táto hodnota nezávisí od toho, akú hodnotu pritom nadobúda premenná  $x$ . To znamená, že premenná  $y$  je vo výraze (6) voľná, kým premenná  $x$  viazaná. Lambda-operátor viaže premenné podobne, ako ich viažu kvantifikátory a jota-operátor. Výrokový výraz  $F$  vo výraze  $(\lambda \pi)F$  sa nazýva **dosahom lambda-operátora** (zvyčajne sa dáva do

zátvoriek, ale ak nehrozí nedorozumenie, môžeme ich vynechať). Každý výskyt premennej  $\pi$  vo výraze  $(\lambda\pi)F$  je viazaný, môžeme teda povedať, *premenná*  $\pi$  je v ňom viazaná.

Teraz predpokladajme, že  $F$  je výroková forma, v ktorej sa vyskytuje voľne iba premenná  $\pi$ . Aby sme zdôraznili, že forma  $F$  obsahuje voľnú premennú  $\pi$ , budeme ju zapisovať aj v tvare  $F(\pi)$  (táto forma predstavuje ľubovoľnú výrokovú formu, v ktorej sa nachádza premenná  $\pi$ ). Ak  $m$  je individuové meno, tak výsledok dosadenia tohto mena za každý voľný výskyt premennej  $\pi$  v  $F(\pi)$  budeme zapisovať ako  $F(m)$  (teda  $F(m)$  tu predstavuje výrok ľubovoľnej štruktúry, v ktorom sa na miestach premennej  $\pi$  vo forme  $F(\pi)$  vyskytuje meno  $m$ ). Pretože  $(\lambda\pi)F(\pi)$  je jednoargumentový predikát, vo výrokových výrazoch môže vystupovať na tých istých miestach ako jednoduché jednoargumentové predikáty (alebo jednoargumentové predikátové premenné). Aby text, v ktorom sa bude vyskytovať, bol prehľadnejší, celý predikátový výraz budeme dávať do hranatých zátvoriek. To znamená, ak  $m$  je individuové meno, tak výraz  $[(\lambda\pi)F(\pi)](m)$  je výrok zložený z predikátu  $[(\lambda\pi)F(\pi)]$  a individuového mena  $m$ . V tomto výroku sa individu denotovanému menom  $m$  pripisuje vlastnosť, ktorú signifikuje  $(\lambda\pi)F(\pi)$ . Je to výrok tvaru  $P(a)$ , ktorým sme sa už zaoberali.

#### **Pravdivostná podmienka pre výroky tvaru $P(m)$ , v ktorých $P$ je jednoargumentový lambda-predikát**

Ak  $F(\pi)$  je výroková forma, v ktorej sa voľne vyskytuje iba premenná  $\pi$  a  $m$  je individuové meno, tak

$$[(\lambda\pi)F(\pi)](m)$$

je pravdivý výrok práve vtedy, keď  $F(m)$ .

Inak povedané,  $[(\lambda\pi)F(\pi)](m)$  je pravdivý výrok vtedy a len vtedy, keď je pravdivý výrok, ktorý dostaneme z formy  $F(\pi)$  dosadením mena  $m$  za každý voľný výskyt premennej  $\pi$ . Napríklad výrok

$$(7) [(\lambda x)(Pr(x) \wedge 100 \leq x \leq 200)](122),$$

kde  $Pr$  je predikát byť prvočíslom, je pravdivý práve vtedy, keď  $Pr(122) \wedge 100 \leq 122 \leq 200$ . Výrok

$$(8) [(\lambda x)(x \text{ napísal novelu a venoval ju } x)](D. \text{ Chrobák})$$

je pravdivý práve vtedy, keď D. Chrobák napísal novelu a venoval ju D. Chrobákovi, čiže sebe samému. Predpokladajme, že *Sl* signifikuje vlastnosť byť Slovákom, *Am* – vlastnosť žiť v Amerike, *Md* – vlastnosť byť Maďarom a *Vm* – voliť vo voľbách r. 1994 HZDS a že oborom premennosti premennej *x* je množina ľudí a pokúsme sa preložiť do slovenčiny a so zreteľom na uvedenú pravdivostnú podmienku overiť tieto výroky:

(9)  $[(\lambda x)(Sl(x) \wedge Am(x))](V. \text{ Mečiar}),$

(10)  $[(\lambda x)((Sl(x) \vee Md(x)) \supset Vm(x))](V. \text{ Klaus}).$

Predikát výroku (9) signifikuje vlastnosť byť človekom, ktorý je Slovákom a žije v Amerike. Vo výroku (9) sa táto vlastnosť pripisuje V. Mečiarovi, môžeme ho teda preložiť vetou „V. Mečiar je človek, ktorý je Slovákom a žije v Amerike“ alebo menej kostrbato „V. Mečiar je Slovákom, ktorý žije v Amerike“. Podľa uvedenej pravdivostnej podmienky výrok (9) je pravdivý práve vtedy, keď V. Mečiar je Slovákom a žije v Amerike, no keďže V. Mečiar žije na Slovensku, tento výrok je nepravdivý. Na hladký preklad výroku (10) chýbajú v prirodzených jazykoch primeranejšie prostriedky. Akú vlastnosť signifikuje predikát výroku (10)? Zrejme ide o vlastnosť byť človekom, pre ktorého platí, že ak je Slovákom alebo Maďarom, tak vo voľbách r.1994 volil HZDS. Túto vlastnosť má jednak každý Slovákom či Maďarom, ktorý r. 1994 volil HZDS, jednak každý človek, ktorý nie je ani Slovákom ani Maďarom, lebo taký človek spĺňa podmienku  $(Sl(x) \vee Md(x)) \supset Vm(x)$  (nespĺňa totiž jej antecedent). Výrok (10) by sme mohli preložiť kostrbatou vetou „V. Klaus je človek, pre ktorého platí, že ak je Slovákom alebo Maďarom, tak r.1994 volil HZDS“. Podľa uvedenej pravdivostnej podmienky výrok (10) je pravdivý práve vtedy, keď  $(Sl(V. \text{ Klaus}) \vee Md(V. \text{ Klaus})) \supset Vm(V. \text{ Klaus})$ . Keďže V. Klaus nie je ani Slovákom ani Maďarom, antecedent tejto implikácie je nepravdivý a celá implikácia pravdivá, z čoho vyplýva, že (10) je pravdivý výrok.

Lambda-predikát výroku (10) nepatrí k výrazom, ktoré sa používajú v každodennom jazyku. Jeho preklad do prirodzeného jazyka naráža síce na isté ťažkosti, ale to neznamená, že je nezmyselný a že nič nesignifikuje. Jeho signifikátom je vlastnosť, ktorú možno nejakému individuu pripísať alebo uprieť rovnako korektné ako vlastnosti *Sl*, *Md* a *Vm*. Jej nezvyčajnosť a nízky stupeň uplatnenia v bežných úvahách ešte nesvedčia o tom, že nejestvuje. Keď implikáciu vyskytujúcu sa v predikáte výroku (10) nahradíme konjunkciou, dos-

taneme výraz  $(\lambda x)((Sl(x) \vee Md(x)) \wedge Vm(x))$ , ktorý signifikuje omnoho intuitívnejšiu vlastnosť byť Slovákom alebo Maďarom, ktorý volil r.1994 HZDS.

21. **Viacargumentové lambda-predikáty.** Podobne ako jednoargumentové možno konštruovať dvoj-, troj-, ...,  $n$ -argumentové predikáty, signifikujúce vzťahy a denotujúce ich rozsahy (relácie). Napríklad keď formu „ $x$  napísal novelu a venoval ju (osobe)  $y$ “ spojíme s operátorom  $\lambda$  zreťazeným s premennými  $x, y$  v tomto poradí, dostaneme dvojjargumentový predikát

$$(11) (\lambda xy)(x \text{ napísal novelu a venoval ju (osobe) } y),$$

ktorý signifikuje binárny vzťah a denotuje binárnu reláciu. Lubovoľné dve indivíduá  $a, b$  z oboru premennosti premenných  $x, y$  sú v tomto vzťahu práve vtedy, keď individuum  $a$  napísalo novelu a venovalo ju individuu  $b$ , čo sa konštatuje aj v tomto výroku

$$(12) [(\lambda xy)(x \text{ napísal novelu a venoval ju (osobe) } y)](a,b).$$

Veľmi dôležité je tu poradie premenných za operátorom  $\lambda$  a poradie argumentov  $a, b$  za predikátom. Výrok (12) je totiž pravdivý práve vtedy, keď je pravdivý výrok, ktorý dostaneme z formy  $(x \text{ napísal novelu ... } y)$  tak, že za premennú  $x$ , ktorá je vo výraze  $(\lambda xy)$  prvá, dosadíme do tejto formy prvý argument  $a$ , kým za premennú, ktorá je vo výraze  $(\lambda xy)$  druhá, dosadíme druhý argument. To isté platí o pravdivosti výroku

$$(13) [(\lambda xy)(x \text{ napísal novelu a venoval ju (osobe) } y)](b,a),$$

kým výrok

$$(14) [(\lambda xyz)(S(x,y) \wedge S(y,z))](c,a,b),$$

kde  $S$  značí byť starší, je pravdivý práve vtedy, keď  $S(c,a)$  a  $S(a,b)$  a výrok

$$(15) [(\lambda yzx)(S(x,y) \wedge S(y,z))](a,c,b)$$

práve vtedy, keď  $S(b,a)$  a  $S(a,c)$ . Predikát výroku (12) signifikuje ternárny vzťah s extenziou, ktorá obsahuje usporiadanú trojicu  $\langle a,b,c \rangle$  vtedy a len vtedy, keď

$S(a,b)$  a  $S(b,c)$ . Lahko sa možno presvedčiť o tom, že predikáty výrokov (14), (15) denotujú rôzne relácie. Členy usporiadanej trojice  $\langle a,b,c \rangle$  sú v relácii, ktorú denotuje predikát výroku (14), práve vtedy, keď  $a$  je najstarší a  $c$  najmladší člen trojice. Členy tej istej trojice sú v relácii, ktorú denotuje predikát výroku (15), práve vtedy, keď  $S(c,a) \wedge S(a,b)$ , čiže vtedy, keď  $c$  je najstarší a  $b$  najmladší člen trojice. To znamená, že trojica, ktorá je prvkom prvej relácie, nie je prvkom druhej a naopak, z čoho vyplýva, že predikáty výrokov (14), (15) majú rôzne denotáty, a teda aj signifikáty.

Zmenou poradia premenných, ktoré sa nachádzajú hneď za lambda-operátorom, môžeme z pôvodného predikátu získať predikát, ktorý signifikuje iný vzťah. Napríklad  $(\lambda xy)S(x,y)$  je predikát, ktorý signifikuje ten istý vzťah ako jednoduchý predikát  $S$ , ale keď zmeníme poradie premenných  $x, y$  bezprostredne za lambda-operátorom, dostaneme predikát  $(\lambda yx)S(x,y)$ . Potom platí, že  $[(\lambda yx)S(x,y)](a,b)$  práve vtedy, keď  $S(b,a)$ , teda keď  $a$  je mladšie ako  $b$ . Lahko možno dokázať, že  $[(\lambda yx)S(x,y)](a,b)$  vtedy a len vtedy, keď  $a$  je mladšie ako  $b$ . Ale v niektorých prípadoch zmena poradia premenných za operátorom nemá vplyv na výsledok – získaný predikát signifikuje ten istý vzťah ako pôvodný. Napríklad obidva predikáty  $(\lambda xy)Pz(x,y)$ ,  $(\lambda yx)Pz(x,y)$ , v ktorých  $Pz$  značí byť príbuzný, signifikujú ten istý vzťah ako  $Pz$ . Zmena poradia premenných neovplyvňuje výsledok, lebo  $Pz$  je symetrický vzťah.

Teraz môžeme formulovať pravdivostnú podmienku pre ľubovoľný výrok tvaru  $R(a_1, \dots, a_n)$ , v ktorom  $R$  je  $n$ -argumentový lambda-predikát utvorený z výrokovej formy  $F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  s voľnými premennými  $\pi_1, \dots, \pi_n$ . Poznamenávame, že  $F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  predstavuje ľubovoľnú výrokovú formu, v ktorej sa voľne vyskytujú práve premenné  $\pi_1, \dots, \pi_n$ . Výrok, ktorý z nej dostaneme tak, že za každý výskyt premennej  $\pi_i$  dosadíme meno  $m_i$ , budeme zapisovať výrazom  $F(m_1, \dots, m_n)$ .

### Pravdivostná podmienka pre výroky tvaru $R(m_1, \dots, m_n)$ , v ktorých $R$ je $n$ -argumentový lambda-predikát

Ak  $F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  je výroková forma, v ktorej sa voľne vyskytujú práve premenné  $\pi_1, \dots, \pi_n$  a  $m_1, \dots, m_n$  sú individuové mená, tak výrok tvaru

$$[(\lambda \pi_1 \dots \pi_n)F(\pi_1, \dots, \pi_n)](m_1, \dots, m_n)$$

je pravdivý práve vtedy, keď  $F(m_1, \dots, m_n)$ .

Inak by sme to mohli povedať aj tak, že tento výrok je pravdivý vtedy a len vtedy, keď každé ohodnotenie  $v$ , ktoré premennej  $\pi_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) priraduje objekt

denotovaný menom  $m_i$ , splňa formu  $F(\pi_1, \dots, \pi_n)$ , teda keď výrok  $F(m_1, \dots, m_n)$  je pravdivý.

**22. Niektoré aplikácie lambda-predikátov.** Pomocou operátora  $\lambda$  možno z formy  $F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  utvoriť nielen  $n$ -argumentové lambda-predikáty, ale aj rôzne predikátové formy – stačí niektoré z premenných ponechať voľné. O árnosti utvoreného predikátu rozhoduje počet premenných viazaných operátorom  $\lambda$ , čiže každý predikátový výraz tvaru  $(\lambda\pi_i)F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  je jednoargumentový, každý výraz tvaru  $(\lambda\pi_i\pi_j)F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  je dvoargumentový, tvaru  $(\lambda\pi_i\pi_j\pi_k)F(\pi_1, \dots, \pi_n)$  – trojargumentový atď. Sú to predikátové formy, z ktorých môžeme konkrétne predikáty získať dosadením mien individuí za premenné, ktoré zostali voľné.

Zaujímavými takto utvorenými predikátmi sú výrazy, ktoré signifikujú **vzťahné vlastnosti**, t.j. vlastnosti podmienené nejakým vzťahom.<sup>2</sup> Napríklad z formy „ $x$  je synom  $y$ “ môžeme utvoriť predikátovú formu  $(\lambda x)(x \text{ je synom } y)$  a z nej jednoargumentový predikát  $(\lambda x)(x \text{ je synom } A)$ . Dubčeka, ktorý signifikuje vzťahnú vlastnosť byť synom A. Dubčeka. Podobne utvorený predikát  $(\lambda y)(A \text{ je synom } y)$  signifikuje vlastnosť, ktorá nejakému individuu prislúcha práve vtedy, keď A. Dubček je jeho (jej) synom, čiže vlastnosť byť rodičom A. Dubčeka.

Za vzťahné možno pokladať aj vlastnosti signifikované predikátmi získanými z foriem, v ktorých sa okrem voľných premenných vyskytujú i kvantifikované premenné. Takým je napr. jednoargumentový predikát  $(\lambda y)(\forall x)(x \leq y)$  signifikujúci vlastnosť, ktorá nejakému číslu  $a$  prislúcha práve vtedy, keď každé číslo  $x$  je menšie alebo rovné číslu  $a$  – teda vlastnosť byť najväčším číslom. Ak oborom premennosti premenných  $x, y$  je množina ľudí, predikát  $(\lambda x)(\forall y)(y \neq x \supset y \text{ je bohatšie ako } x)$  signifikuje vlastnosť prislúchajúcu individuu  $a$  práve vtedy, keď každé individuum  $y$  odlišné od  $a$  je bohatšie ako  $a$ .<sup>3</sup> Túto vlastnosť signifikuje predikát prirodzeného jazyka „býť najchudobnejším človekom“. Pretože za najchudobnejšieho označujeme spravidla *jedného* človeka, výraz „najchudobnejší človek“ možno interpretovať aj ako individuový a jeho logickú stavbu zachytiť individuovou deskripciou  $(\lambda x)(\forall y)(y \neq x \supset y \text{ je bohatšie ako } x)$ .

Keďže podoba  $F$  vo výrazoch tvaru  $(\lambda\pi)F$  je limitovaná iba podmienkou, že  $F$  má byť *výroková* forma, tvarová a obsahová rozmanitosť lambda-predikátov je neobmedzená. Každý lambda-predikát vyjadruje nejaký predikátový pojem a vnútorná stavba predikátu odzrkadľuje logickú štruktúru tohto pojmu. Pomocou lambda-operátora môžeme zavádzať nové pojmy, po zavedení takého pojmu prostredníctvom lambda-predikátu môžeme zložený predikát nahradiť nejakou skratkou a potom používať iba skratku. Pritom nesmieme strácať so zreteľa



skutočnosť, že význam skratky je totožný s významom zloženého lambda-predikátu, ktorý skratka zastupuje. Práca so zloženými lambda-predikátmi je totiž dosť ťažkopádna a čím je predikát zložitejší, tým ťažšie sa ním narába.

Popri zavádzaní nových pojmov pomocou lambda-operátora a vhodne vybraných výrokových foriem môžeme robiť rozbery známych pojmov, ktoré vyjadrujeme jednoduchými výrazmi. Napríklad pojem Slovan môžeme analyzovať ako pojem  $(\lambda x)(x \text{ je Slovak} \vee x \text{ je Čech} \vee x \text{ je Rus} \vee \dots)$  a výraz „Slovan“ pokladať za skratku tohto lambda-predikátu (tým nechceme vylúčiť iné možnosti analýzy pojmu Slovan). Vnútornú štruktúru pojmu teta by sme mohli postihnúť lambda-predikátom  $(\lambda x)(x \text{ je otcova sestra alebo } x \text{ je matkina sestra})$  a výraz „teta“ pokladať za skratku tohto predikátu. Podobne môžeme význam mnohých výrazov patrične spresniť, prípadne odlišiť od iných, významovo príbuzných výrazov. Venujme pozornosť niekoľkým príkladom.

V prirodzenom jazyku existujú výrazy, ktoré sa v niektorých kontextoch používajú ako jednoargumentové a v iných ako dvojjargumentové predikáty, teda v dvoch odlišných významoch (lebo prvé signifikujú vlastnosti a druhé vzťahy). Patrí k nim napr. výraz „je otec“ použitý v takých výrokoch ako „A. Dubček je otec“, „A. Dubček je otec P. Dubčeka“. Čím sa líši význam výrazu „byť otcom“ v prvom výroku od jeho významu v druhom výroku? V prvom výroku sa A. Dubčekovi pripisuje *vlastnosť* byť otcom, v druhom sa konštatuje, že A. Dubček je vo *vzťahu* byť otcom k P. Dubčekovi. Nieкто môže mať *vlastnosť* byť otcom iba vtedy, keď je otcom niekoho, čiže keď je vo vzťahu otcovstva k niekomu. To znamená, že *vlastnosť* byť otcom je vzťažná, čiže daná nejakým vzťahom, v tomto prípade vzťahom byť otcom. Ak *O* signifikuje vzťah otcovstva, *vlastnosť* byť otcom môžeme vymedziť lambda-predikátom  $(\lambda x)((\exists y)(O(x,y))$ , ktorý signifikuje *vlastnosť* byť otcom niekoho. Táto *vlastnosť* sa samozrejme líši od *vlastnosti*  $(\lambda x)O(x,P.\text{Dubčeka})$  (byť otcom P. Dubčeka), lebo kým prvá prislúcha každému otcovi, druhá iba A. Dubčekovi. Obdobne dvojnásobný je v slovenčine aj výraz „je matka“.

V našej filozofickej literatúre sa pomerne často používa výraz „sebaidentita“. Málokto však bližšie určuje jeho význam. Ak autor má na mysli identitu =, zbytočne mátie čitateľov novým označením relácie, ktorú dávno nazývame totožnosťou alebo identitou. Segment „seba“ v slove „sebaidentita“ je navyše redundantný, lebo identita je relácia, v ktorej je ľubovoľný objekt iba k *sebe* samému a ničomu inému. Pod *sebaidentitou* by sme však mohli rozumieť aj *vlastnosť* individua, ktorú signifikuje lambda-predikát  $(\lambda x)(x = x)$ . Túto *vlastnosť* má každé individuum *a*, lebo  $[(\lambda x)(x = x)](a)$  práve vtedy, keď  $a = a$ ,

čo platí o ľubovoľnom indivíduu  $a$ . Je to vlastnosť byť totožné so sebou samým, ktorá nie je veľmi zaujímavá, lebo je a priori a triviálne známe, že prislúcha každému indivíduu.

Keďže medzi predikátmi  $=$ ,  $(\lambda x)(x = x)$  je úzky významový súvis, všimnime si, čím sa líšia. Na rozdiel od dvojargumentového predikátu  $=$ , lambda predikát  $(\lambda x)(x = x)$  je iba jednoargumentový a jeho spojením s jedným individuovým menom alebo deskripciou  $a$  získame výrok, v ktorom sa konštatuje *triviálna pravda*, že  $a$  je totožné so sebou samým. Na druhej strane dvojargumentový predikát  $=$  nám umožňuje formulovať aj zaujímavé netriviálne tvrdenia, pravdivé i nepravdivé, lebo jeho spojením s dvoma *nerovnakými* argumentmi môžeme získať výrok, ktorého pravdivostná hodnota nemusí byť na prvý pohľad očividná (dokonca ani vtedy, keď ju možno zistiť a priori) alebo sa dá určiť iba a posteriori. Takými výrokmi sú rozmanité matematické rovnosti alebo empirické konštatácie typu „Hlavné mesto Hondurasu = Tegucigalpa“, „Vrah J. F. Kennedyho = L. H. Oswald“, „Počet obyvateľov Bratislavy = 445 000 obyv.“, „Hmotnosť Zeme =  $5,974 \cdot 10^{24}$  kg“ a pod.

**Zhrnutie.** Pokúsme sa teraz zhrnúť získané poznatky o logickej stavbe výrokov a výrokových foriem jazyka 1. rádu. Najjednoduchšie výroky sú atomárne. Majú jeden z tvarov

$$(16) P(a), R(a_1, \dots, a_n),$$

kde  $a, a_1, \dots, a_n$  sú *individuové vlastné mená* a  $P, R$  sú *jednoduché* predikáty,  $P$  jednoargumentový a  $R$   $n$ -argumentový ( $n \geq 2$ ). V zložitejších výrokoch tvaru  $P(a)$  alebo  $R(a_1, \dots, a_n)$  niektoré (prípadne všetky) z individuových výrazov  $a, a_1, \dots, a_n$  sú individuové deskripcie alebo sa v nich namiesto jednoduchého predikátu  $P$  či  $R$  vyskytuje nejaký lambda-predikát. Vzhľadom na možný výskyt výrokových spojok a kvantifikátorov v deskripciách a lambda-predikátoch sa tieto výroky zvyčajne nenazývajú atomárne, hoci majú tvar  $P(a)$  alebo  $R(a_1, \dots, a_n)$ . Niekedy sa však za atomárne pokladajú aj výroky, v ktorých sa vyskytujú individuové deskripcie (k tejto terminológii sme sa priklonili aj v našom výklade), málokedy však výroky s lambda-predikátmi. Z atomárnych výrokov možno pomocou spojok konštruovať stále zložitejšie a zložitejšie výroky, ktoré majú jeden z týchto tvarov

$$(17) \sim A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B),$$

pričom  $A$ ,  $B$  sú atomárne alebo z atomárnych výrokov a výrokových spojok skonštruované výroky. Keď v ľubovoľnom atomárnom alebo molekulárnom výroku naznačenej stavby niektoré individuové mená alebo predikáty, prípadne výroky, nahradíme premennými tej istej kategórie, dostaneme výrokové formy. Kvantifikáciou premenných, ktoré sa vyskytujú v týchto formách, dostaneme výroky alebo výrokové formy tvaru

$$(18) (\forall \pi)F, (\exists \pi)F,$$

kde  $F$  je výrokový výraz a  $\pi$  premenná určitej kategórie (našu pozornosť sme sústredili najmä na výrazy, v ktorých  $\pi$  je individuová premenná). Pomocou výrazov tvaru (18) možno konštruovať ďalšie výrokové výrazy, ktoré majú niektorú z foriem uvedených v (17). Jazyky, v ktorých sa kvantifikujú iba *individuové* premenné a používajú len predikáty, ktoré denotujú množiny *individuí* alebo množiny usporiadaných  $n$ -tíc *individuí*, sa nazývajú **jazyky prvého rádu**. Našu pozornosť sme venovali najmä výrazom jazykov prvého rádu a na ne ju obmedzíme i v nasledujúcich úvahách.

Podľa toho, aké objekty denotujú alebo nadobúdajú ako svoje hodnoty, jazykové výrazy jazyka prvého rádu sa členia na určité kategórie (ide o istú obdobu delenia slov na slovné druhy, lenže extrapolovanú aj na zložené výrazy), a to na kategóriu individuových výrazov, kategóriu výrokových výrazov, kategóriu jednoargumentových predikátových výrazov, ..., kategóriu  $n$ -argumentových predikátových výrazov, ... . Teda individuové vlastné mená, individuové deskripcie a individuové formy (vrátane individuových premenných) patria do kategórie individuových výrazov, výroky a výrokové formy (medzi ktoré patria aj výrokové premenné) – do kategórie výrokových výrazov a  $n$ -argumentové predikáty a formy  $n$ -argumentových predikátov (vrátane premenných) – do kategórie  $n$ -argumentových predikátových výrazov ( $n \geq 1$ ).

Výroková forma, v ktorej sa nevyskytujú nijaké konkrétne individuové mená ani predikáty (a teda ani výroky), sa nazýva **logickou formou** (výroku). Je to forma, v ktorej sa okrem premenných (a pomocných výrazov, akými sú zátvorky, čiarka a bodka) nachádzajú nanajvýš nejaké spojky a kvantifikátory, prípadne iné logické operátory (napr. jota- alebo lambda-operátor). Skúmaním logických foriem, ich syntaktických a sémantických vlastností a vzťahov sa zaoberá v prvom rade logika. Ale v logike sa neuvažuje o konkrétnom univerze, ani o určitých oboroch premennosti premenných daných voľbou univerza jazyka.

Namiesto výrazu „logická forma“ sa v logike často používa aj termín „formula“. Tento termín sa pri výstavbe každého jazyka logiky (používajúcej mnoho jazykov) bližšie špecifikuje a exaktne definuje. Preto v nej nachádzame rôzne pojmy formuly výrokovkej logiky (v závislosti od voľby spojok a premenných), formuly logiky prvého rádu, formuly teórie typov a pod. Formuly logiky prvého rádu majú ten istý tvar ako výroky tvaru (16) – (18), ale namiesto individuových mien a predikátov sa v nich vyskytujú príslušné premenné a kvantifikujú sa v nich iba individuové premenné, predikátové premenné sú vždy voľné. V niektorých jazykoch logiky prvého rádu sa popri individuových a predikátových premenných vyskytujú aj výrokové premenné, ale také jazyky sa v súčasnosti používajú menej.

V ôsmich pokračovaniach tohto výkladu sme sa zaoberali veľmi jednoduchými, no zároveň pozoruhodne účinnými nástrojmi logickej analýzy jazykových výrazov. Možno ich uplatniť aj pri skúmaní stavby pojmov, súdov a úsudkov, ktoré vyjadrujeme pomocou analyzovaných jazykových výrazov. Treba však dodať, že logické prostriedky a štruktúry, ktorými sme sa v tomto výklade zaoberali, nie sú všemocné. Súčasná logika pozná aj omnoho jemnejšie analytické nástroje ako extenzionálna logika a sémantika jazyka 1. rádu. Okrem výrazov a štruktúr, ktoré sú predmetom skúmania extenzionálnej sémantiky jazyka 1. rádu, si všíma aj mnoho iných výrazov a foriem, pričom svoju pozornosť zameriava i na intenzionálnu (modálnu) a temporálnu stránku významu jazykových výrazov. Na prvú sme čitateľa počas výkladu príležitostne upozorňovali, od druhej sme viac-menej abstrahovali. Záujemcov o hlbší ponor do tejto problematiky musíme odkázať na bohatú literatúru, ktorá vychádza najmä v angličtine.<sup>4</sup>

## POZNÁMKY

- <sup>1</sup> Lambda-operátor zaviedol americký logik A. Church na označovanie funkcií. Výraz  $(\lambda x)M(x)$ , v ktorom sa voľne vyskytuje iba premenná  $x$ , označuje funkciu priradujúcu ľubovoľnému prvku  $a$  z oboru premennosti  $x$  hodnotu, ktorú výraz  $M(x)$  nadobúda pri ohodnotení v priradujúcom premennej  $x$  prvok  $a$ . Touto hodnotou je vlastne denotát výrazu  $M(a)$ . Teda platí, že  $[(\lambda x)M(x)](a) = M(a)$ , pričom  $M(a)$  je výraz, ktorý dostaneme z  $M(x)$  dosadením výrazu „ $a$ “ za premennú  $x$ . Výraz  $M(x)$  môžeme pokladať za návod či predpis na vypočítanie hodnoty, ktorú funkcia  $(\lambda x)M(x)$  priraduje ľubovoľnému argumentu  $a$ . Napríklad výraz  $(\lambda x)(x + 3)$  označuje funkciu, ktorá číslu  $a$  z oboru premennosti  $x$  priradí číslo o 3 väčšie, čiže číslo  $a + 3$  a výraz  $x + 3$  predstavuje predpis na určenie či výpočet priradeného čísla.

V našom výklade budeme lambda-operátor používať v mierne pozmenenom, v podstate len menej striktnom význame. Podobne ho používal napr. R. Carnap v práci [1].

- <sup>2</sup> Niekedy sa nazývajú vzťahovými alebo relačnými vlastnosťami, čo zavádza, lebo termín „vzťahová (relačná) vlastnosť“ v slovenčine znamená aj vlastnosť prislúchajúcu vzťahom (reláciám), kým predikáty, o ktorých je tu reč, signifikujú vlastnosti *individuí*.
- <sup>3</sup> Uvedený a predchádzajúci lambda-predikát obsahuje dve viazané premenné, jednu z nich viaže všeobecný kvantifikátor a druhú lambda-operátor. O árnosti predikátu rozhoduje počet premených viazaných lambda-operátorom na začiatku lambda-predikátu. Preto sú obidva spomenuté predikáty jednoargumentové.
- <sup>4</sup> Český logik P. Tichý skonštruoval systém tzv. transparentnej intenzionalnej logiky (známy aj pod skratkou TIL), ktorý je jedným z najsubtilnejších nástrojov logickej analýzy prirodzeného jazyka (pozri jeho monografiu [3]). So základnými pojmami tejto logiky a jej sémantiky, ako aj s ich uplatnením pri analýze niektorých druhov výrazov sa možno oboznámiť v práci [2].

#### LITERATÚRA

- [1] CARNAP, R. (1947): **Meaning and Necessity**. The University of Chicago Press, Chicago.
- [2] MATERNA, P. – PALA, K. – ZLATUŠKA, J. (1989): **Logická analýza přirozeného jazyka**. Academia, Praha.
- [3] TICHÝ, P. (1988): **Foundations of Frege's Logic**. Walter de Gruyter, Berlin – New York.