Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013

Guest Editor: František Gahér

Contents ▪ Obsah

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 3-4

Vážené čitateľky,
Vážení čitatelia,

Pri príležitosti 50. výročia vzniku Katedry logiky a metodológie vied Filozofickej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave jej členovia zorganizovali v Kaštieli v Dolnej Krupej v dňoch 17. – 18. 9. 2012 vedeckú konferenciu na tému:

Systémy dedukcie: od extenzionálnej logiky k hyperintenzionálnej logike

Toto mimoriadne číslo časopisu Organon F *obsahuje väčšinu príspevkov, ktorých prezentácie na konferencii zazneli. Úvodnou štúdiou je stať Marie Duží s názvom* Dedukce v TIL: Přechod od jednoduché k rozvětvené hierarchii typů. *Druhý článok* Explikace a dedukce: od jednoduché k rozvětvené teorii typů *je z pera Jiřího Raclavského. Ivo Pezlar je autorom štúdie o Tichého dvojdimenzionálnom chápaní inferencie. Karel Šebela vo svojej stati analyzuje Tichého teóriu dedukcie. František Gahér a Lukáš Bielik sú autormi dvoch spoločných článkov:* Prečo len (nutné) pravdy ako predpoklady deduktívnych úsudkov? (dvojdimenzionálny verzus jednodimenzionálny názor na inferenciu) *a* Využitie pojmu „zhoda“ v hyperintenzionálnej dedukcii.

V ďalších príspevkoch, ktoré sú už tematicky rôznorodejšie, sa môžeme dozvedieť niečo viac od Pavla Maternu o problematike expresivity logickej analýzy prirozeného jazyka. Jaroslav Peregrin je autorom state s názvom Odkud se berou axiomy logiky? *Miloš Kosterec vo svojej štúdii* Anaforický reťazec *píše o problematike anafory. Stať Igora Sedlára sa venuje problematike poznania a subštrukturálnych logík. Marián Zouhar prispieva do tejto prílohy štúdiou* Epistemický kontextualizmus a jeho motivácia.

V záverečnom monotematickom bloku je štúdia Alexandra Šimka a Jozefa Šišku na tému logické programovanie a interaktívne aplikácie; Michal Čertický sa zaoberá problematikou modelov akcií a ich indukciou a Michal Vince spolu s Jánom Šefránkom napísali štúdiu, ktorá sa venuje problému dedukcie a reprezentácie znalostí.

Na konferencii sa okrem súčasných členov katedry zúčastnili aj jej zakladajúci členovia Gustáv Riška a Pavel Cmorej i ďalší bývalí členovia. Otec-zakladateľ (prvý vedúci katedry) akademik a bývalý rektor Vojtech Filkorn pred niekoľkými rokmi zomrel. Konferenciu pozdravil v mene dekana Filozofickej fakulty UK prodekan doc. Anton

Eliáš, ďalej vedúca Katedry filozofie a dejín filozofie FiF UK doc. Mariana Szapuová, riaditeľ Oddelenia logiky Filozofického ústavu AVČR v Prahe prof. Jaroslav Peregrin a vedúci Katedry logiky Filozofickej fakulty Karlovej Univerzity v Prahe doc. Vítězslav Švejdar.

Aj táto konferencia potvrdzovala fakt, že naša katedra spolupracuje najmä s Katedrou filozofie a dejín filozofie Filozofickej fakulty UK a s Oddelením analytickej filozofie SAV. Z Čiech je to najmä Oddelenie logiky Filozofického ústavu AVČR v Prahe a Katedra logiky Filozofickej fakulty Karlovej Univerzity v Prahe. Spolupracujeme aj s kolegami z katedier filozofie filozofických fakúlt Masarykovej Univerzity v Brne, Západočeskej univerzity v Plzni, Univerzity Palackého v Olomouci, s kolegami z Katedry informatiky Fakulty elektrotechniky a informatiky Vysokej školy banskej – Technickej univerzity v Ostrave, ale aj s inými pracoviskami, čoho príkladom je aj účasť kolegov z Katedry aplikovanej informatiky z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky našej univerzity.

Na záver chcem poďakovať všetkým účastníkom konferencie za vytvorenie tvorivej a priateľskej atmosféry a osobitne môjmu dlhoročnému priateľovi Martinovi Šamajovi, ktorého nezištný finančný príspevok umožnil, aby sme medzi nami privítali a pohostili aj bývalých členov katedry.

Dúfam, že tento výstup z konferencie dokumentuje, že sme úspešne nadviazali na dielo otcov zakladateľov a že práve mladší členovia našej katedry sú zárukou jej ďalšieho rozvoja.

František Gahér

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 5-36

Deduction in TIL: From Simple to Ramified Hierarchy of Types

MARIE DUŽÍ

Department of Computer Science. VSB-Technical University Ostrava.
17. listopadu 15. 708 33 Ostrava. Czech Republic.
marie.duzi@gmail.com

RECEIVED: 13-02-2013 ▪ ACCEPTED: 05-03-2013

Abstract: Tichý's Transparent Intensional Logic (TIL) is an overarching logical framework apt for the analysis of all sorts of discourse, whether colloquial, scientific, mathematical or logical. The theory is a *procedural* (as opposed to denotational) one, according to which the meaning of an expression is an abstract, extra-linguistic procedure detailing what operations to apply to what procedural constituents to arrive at the product (if any) of the procedure that is the object denoted by the expression. Such procedures are rigorously defined as TIL *constructions*. Though TIL analytical potential is very large, deduction in TIL has been rather neglected. Tichý defined a sequent calculus for pre-1988 TIL, that is TIL based on the simple theory of types. Since then no other attempt to define a proof calculus for TIL has been presented. The goal of this paper is to propose a generalization and adjustment of Tichý's calculus to TIL 2010. First I briefly recapitulate the rules of simple-typed calculus as presented by Tichý. Then I propose the adjustments of the calculus so that it be applicable to hyperintensions within the ramified hierarchy of types. TIL operates with a single procedural semantics for all kinds of logical-semantic context, be it extensional, intensional or hyperintensional. I show that operating in a hyperintensional context is far from being technically trivial. Yet it is feasible. To this end we introduce a substitution method that operates on hyperintensions. It makes use of a four-place substitution function (called *Sub*) defined over hyperintensions.

Keywords: Existential generalisation – extensional rules – hyperintensions – sequent calculus – substitution.

1 Foundations of TIL

From the formal point of view, TIL is a hyperintensional, partial typed λ-calculus. Thus the syntax of TIL is Church's (higher-order) typed λ-calculus with the important difference that the syntax has been assigned a *procedural* (as opposed to denotational) semantics. TIL λ-terms do not denote functions; rather they denote procedures (constructions in TIL terminology) that produce functions or functional values as their product. A linguistic sense of an expression is an abstract *procedure* detailing how to arrive at an object of a particular logical type denoted by the expression. TIL *constructions* are such procedures. Thus, abstraction transforms into the molecular procedure of forming a function, application into the molecular procedure of applying a function to an argument, and variables into atomic procedures for arriving at their values assigned by a valuation.

There are two kinds of constructions, atomic and compound (molecular). Atomic constructions (*Variables* and *Trivializations*) do not contain any other constituent but themselves; they specify objects (of any type) on which compound constructions operate. The *variables* x, y, p, q, ..., construct objects dependently on a valuation; they v-construct. The *Trivialisation* of an object X (of any type, even a construction), in symbols ^0X, constructs simply X without the mediation of any other construction. *Compound* constructions, which consist of other constituents as well, are *Composition* and *Closure*. *Composition* $[F\,A_1\ldots A_n]$ is the operation of functional application. It v-constructs the value of the function f (*valuation-*, or v-, -constructed by F) at a tuple-argument A (v-constructed by A_1, ..., A_n) if the function f is defined at A, otherwise the Composition is *v-improper*, i.e., it *fails* to v-construct anything.[1] *Closure* $[\lambda x_1 \ldots x_n\, X]$ spells out the instruction to v-construct a function by abstracting over the values of the variables $x_1,\ldots,x_n$ in the ordinary manner of the λ-calculi. Finally, higher-order constructions can be used twice over as constituents of composite constructions. This is achieved by a construction called *Double Execution*, ^2X, that behaves as follows: If X v-constructs a construction X', and X' v-constructs an entity Y, then ^2X v-constructs Y; otherwise ^2X is *v-improper*, failing as it does to v-construct anything.

[1] We treat functions as partial mappings, i.e., flat set-theoretical objects, unlike the *constructions* of functions which are structured procedures consisting of constituents.

TIL constructions, as well as the entities they construct, all receive a type. The formal ontology of TIL is bi-dimensional; one dimension is made up of constructions, the other dimension encompasses non-constructions. On the ground level of the type hierarchy, there are non-constructional entities unstructured from the algorithmic point of view belonging to a *type of order 1*. Given a *base* of *atomic types* of order 1, the induction rule for forming functional types is applied: where α, $\beta_1,\dots,\beta_n$ are types of order 1, the set of partial mappings from $\beta_1 \times\dots\times \beta_n$ to α, denoted '$(\alpha\ \beta_1\dots\beta_n)$', is a type of order 1 as well. Constructions that construct entities of order 1 are *constructions of order 1*. They themselves belong to a *type of order 2*, denoted '$*_1$'. The type $*_1$ together with atomic types of order 1 serves as a base for the induction rule: any collection of partial mappings, type $(\alpha\ \beta_1\dots\beta_n)$, *involving* $*_1$ in their domain or range is a *type of order 2*. Constructions belonging to a type $*_2$ that identify entities of order 1 or 2, and partial mappings involving such constructions, belong to a *type of order 3*. And so on *ad infinitum*.[2]

The first three definitions below constitute the logical heart of TIL.

Definition 1 (*types of order 1*)
Let B be a *base*, where a base is a collection of pair-wise disjoint, non-empty sets. Then:

(*i*) Every member of B is an elementary *type of order 1 over B*.
(*ii*) Let α, β_1, …, β_m ($m > 0$) be types of order 1 over B. Then the collection $(\alpha\ \beta_1 \dots \beta_m)$ of all m-ary partial mappings from $\beta_1\times\dots\times\beta_m$ into α is a functional *type of* order *1 over B*.
(*iii*) Nothing is a *type of order 1 over B* unless it so follows from (i) and (ii). □

Remark. For the purposes of natural-language analysis, we are currently assuming the following epistemic base of ground types, each of which is part of the ontological commitments of TIL:[3]

---

[2] For details see, for instance, Duží – Jespersen – Materna (2010, Ch. 1.3, 1.4), or Duží – Materna (2012, Ch. 2).

[3] TIL is an open-ended system. The above epistemic base {ο, ι, τ, ω} was chosen, because it is apt for natural-language analysis, but the choice of base depends on the area and language to be analysed. For instance, possible worlds and times are out of place in case of mathematics, and the base might consist of, e.g., ο and ν, where ν is the type of natural numbers.

ο: the set of truth-values {**T, F**};
ι: the set of individuals (a constant universe of discourse);
τ: the set of real numbers (doubling as temporal continuum);
ω: the set of logically possible worlds (the logical space).

Definition 2 (*construction*)

(*i*) The *variable* x is a *construction* that constructs an object O of the respective type dependently on a valuation v: x v-constructs O.

(*ii*) *Trivialization*: Where X is an object whatsoever (an extension, an intension or a *construction*), ${}^0X$ is the *construction Trivialization*. It constructs X without any change in X.

(*iii*) The *Composition* $[X\ Y_1 \ldots Y_m]$ is the following *construction*. If X *v-constructs* a function f of type $(\alpha\beta_1\ldots\beta_m)$, and $Y_1, \ldots, Y_m$ *v-construct* entities $B_1, \ldots, B_m$ of types $\beta_1, \ldots, \beta_m$, respectively, then the *Composition* $[X\ Y_1 \ldots Y_m]$ *v-constructs* the value (an entity, if any, of type α) of f at the tuple argument $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$. Otherwise the *Composition* $[X\ Y_1 \ldots Y_m]$ does not *v-construct* anything and so is *v-improper*.

(*iv*) The *Closure* $[\lambda x_1 \ldots x_m\ Y]$ is the following *construction*. Let $x_1, x_2, \ldots, x_m$ be pair-wise distinct variables v-constructing entities of types $\beta_1, \ldots, \beta_m$ and Y a construction v-constructing an α-entity. Then $[\lambda x_1 \ldots x_m\ Y]$ is the *construction* λ-*Closure* (or *Closure*). It *v-constructs* the following function f of the type $(\alpha\beta_1\ldots\beta_m)$. Let $v(B_1/x_1,\ldots,B_m/x_m)$ be a valuation identical with v at least up to assigning objects $B_1/\beta_1, \ldots, B_m/\beta_m$ to variables $x_1, \ldots, x_m$. If Y is $v(B_1/x_1,\ldots,B_m/x_m)$-improper (see *iii*), then f is undefined at $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$. Otherwise the value of f at $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$ is the α-entity $v(B_1/x_1,\ldots,B_m/x_m)$-constructed by Y.

(*v*) The *Single Execution* ${}^1X$ is the *construction* that either v-constructs the entity v-constructed by X or, if X v-constructs nothing, is v-improper.

(*vi*) The *Double Execution* ${}^2X$ is the following *construction*. Where X is any entity, the *Double Execution* ${}^2X$ is *v-improper* (yielding nothing relative to v) if X is not itself a construction, or if X does not v-construct a construction, or if X v-constructs a v-improper construction. Otherwise, let X v-construct a construction Y and Y v-construct an entity Z: then ${}^2X$ v-constructs Z.

(*vii*) Nothing is a *construction*, unless it so follows from (*i*) through (*vi*). □

The definition of the ramified hierarchy of types decomposes into three parts. First, simple types of order 1 that were already defined by Definition 1. Second, constructions of order n, and third, types of order $n + 1$.

Definition 3 (*ramified hierarchy of types*)
$\mathbf{T}_1$ *(types of order 1)*. See Definition 1.
$\mathbf{C}_n$ *(constructions of order n)*
(*i*) Let x be a variable ranging over a type of order n. Then x is a *construction of order n over B*.
(*ii*) Let X be a member of a type of order n. Then ${}^0X$, ${}^1X$, ${}^2X$ are *constructions of order n over B*.
(*iii*) Let $X, X_1,\ldots, X_m$ ($m > 0$) be constructions of order n over B. Then $[X X_1\ldots X_m]$ is a *construction of order n over B*.
(*iv*) Let $x_1,\ldots x_m$, X ($m > 0$) be constructions of order n over B. Then $[\lambda x_1\ldots x_m X]$ is a *construction of order n over B*.
(*v*) Nothing is a *construction of order n over B* unless it so follows from $\mathbf{C}_n$ (*i*) – (*iv*).
$\mathbf{T}_{n+1}$ *(types of order n + 1)* Let $*_n$ be the collection of all constructions of order n over B. Then
(*i*) $*_n$ and every type of order n are *types of order n + 1*.
(*ii*) If $0 < m$ and α, $\beta_1,\ldots,\beta_m$ are types of order $n + 1$ over B, then $(\alpha\ \beta_1 \ldots \beta_m)$ (see T_1 ii)) is a *type of order n* + 1 *over B*.
(*iii*) Nothing is a *type of order n + 1 over B* unless it so follows from (*i*) and (*ii*). □

Empirical languages incorporate an element of *contingency* that non-empirical ones lack. Empirical expressions denote *empirical conditions* that may or may not be satisfied at some empirical index of evaluation. Non-empirical languages have no need for an additional category of expressions for empirical conditions. We model these empirical conditions as *possible-world intensions.* Intensions are entities of type ($\beta\omega$): mappings from possible worlds to an arbitrary type β. The type β is frequently the type of a *chronology* of α-objects, i.e. a mapping of type ($\alpha\tau$). Thus α-intensions are frequently functions of type (($\alpha\tau$)ω), abbreviated as '$\alpha_{\tau\omega}$'. We typically say that an index of evaluation is a world/time pair $\langle w, t\rangle$. *Extensional entities* are entities of some type α where $\alpha \neq (\beta\omega)$ for any type β. Where w ranges over ω and t over τ, the following schematic Closure characterizes the logical syntax of any empirical language: $\lambda w \lambda t\ [\ldots w\ldots.t\ldots]$.

Logical objects like *truth-functions* and *quantifiers* are extensional: $\wedge$ (conjunction), $\vee$ (disjunction) and $\supset$ (implication) are of type (οοο), and $\neg$ (negation) of type (οο). *Quantifiers* $\forall^{\alpha}$, $\exists^{\alpha}$ are type-theoretically polymorphous, total functions of type $(o(o\alpha))$, for an arbitrary type α, defined as follows. The *universal quantifier* $\forall^{\alpha}$ is a function that associates a class A of α-elements with **T** if A contains all elements of the type α, otherwise with **F**. The *existential quantifier* $\exists^{\alpha}$ is a function that associates a class A of α-elements with **T** if A is a non-empty class, otherwise with **F**. Below all type indications will be provided outside the formulae in order not to clutter the notation. Furthermore, 'X/α' means that an object X is (a member) of type α. '$X \rightarrow_v \alpha$' means that the type of the object *valuation*-constructed by X is α. We write '$X \rightarrow \alpha$' if what is v-constructed does not depend on a valuation v. Throughout, it holds that the variables $w \rightarrow_v \omega$ and $t \rightarrow_v \tau$. If $C \rightarrow_v \alpha_{\tau\omega}$ then the frequently used Composition $[[C\ w]\ t]$, which is the intensional descent (a.k.a. extensionalization) of the α-intension v-constructed by C, will be encoded as 'C_{wt}'.

Our neo-Fregean semantic schema, which applies to all contexts, is this:

$$\begin{tikzcd}
\textit{Expression} \arrow[r, "\textit{expresses}"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "\textit{denotes}"'] & \textit{Construction} \arrow[r, dashed, "\textit{constructs}"'] & \textit{Denotation}
\end{tikzcd}$$

The most important relation in this schema is between an expression and its meaning, i.e., a construction. Once *constructions* have been defined, we can logically examine them; we can investigate *a priori* what (if anything) a construction constructs and what is entailed by it. Thus meanings/constructions are semantically primary, denotations secondary, because an expression denotes an object (if any) *via* its meaning that is a construction *expressed* by the expression. Once a construction is explicitly given as a result of logical analysis, the entity (if any) it constructs is already implicitly given. As a limiting case, the logical analysis may reveal that the construction fails to construct anything by being *improper*.

Any given unambiguous term or expression (even one involving indexicals or anaphoric pronouns) expresses the same construction as its sense whatever sort of context the term or expression is embedded within. And the meaning of an expression determines the respective denoted entity (if any), but not vice versa. The denoted entities are (possibly 0-ary) functions understood as set-theoretical mappings. Thus we strictly distinguish between a procedure (construction) and its product (here, a constructed function), and between a function and its value. What makes TIL *anti-contextual* and *compositional* is the fact that the theory construes the semantic properties of the sense and denotation relations as remaining invariant across different sorts of linguistic contexts. We do not develop a special extensional logic for extensional contexts, intensional logic for intensional contexts and hyperintensional logic for hyperintensional contexts. Logical operations are universal and context-invariant. What is context dependent are the arguments on which these operations operate. In a *hyperintensional* context they are *constructions* themselves; in an *intensional* context the arguments of logical rules and operations are the *products* of constructions, that is set-theoretical *functions*; finally, in an *extensional* context we operate on functional *values*.

Technically speaking, some constructions are modes of presentation of functions, including 0-place functions such as individuals and truth-values, and the rest are modes of presentation of other constructions. Thus, with constructions of constructions, constructions of functions, functions, and functional values in our stratified ontology, we need to keep track of the traffic between multiple logical strata. The ramified type hierarchy does just that. What is important about this traffic is, first of all, that constructions may themselves figure as functional arguments or values. Thus we consequently need constructions of one order higher in order to present those being arguments or values of functions. Typically, constructions that serve as arguments to operate on are supplied by the two kinds of atomic constructions, viz. Trivialization and variables. For instance, if $x/*_1 \rightarrow \tau$ is a variable belonging to $*_1$, the type of order 2, then ${}^0x/*_2 \rightarrow *_1$ is a construction belonging to $*_2$, the type of order 3, which constructs just the variable x.

It should be clear now that we need to distinguish three kinds of context. Here I only recapitulate the characterizations of these contexts. Rigorous definitions are rather complicated and thus out of the scope of this paper.[4] When defining the three kinds of context we proceed in a top-down way. First we distinguish two kinds of occurrence of a subconstruction D in a construction C, which means that we define the *use-mention*

---

[4] For these rigorous definitions see Duží et al. (2010, §2.6) or Duží – Materna (2012, Chapter 11).

distinction. Then we define two kinds of *using* a construction D as a constituent of C. The constituent D can be used either intensionally or extensionally in C.

The *use-mention* distinction is traditionally understood as the distinction between using an *expression* (or any piece of language) and mentioning it using a quotation in a meta-language. However, we do not analyse the semantics of quotation, which is not to say that it is not an interesting topic in the philosophy of language. Instead, we analyse the semantics of using expressions in a communicative act. An expression E is used to communicate its meaning that we explicate as a TIL construction C. In principle, there are three ways of using an expression within a linguistic discourse.

First, the *meaning* of E can be just *mentioned* as an object of predication rather than used to point at the object denoted by it (if any). This is in particular the case of sentences expressing attitudes. For instance, in the sentence "*a* believes explicitly that Cracow is greater than Warsaw" the meaning of the embedded clause 'Cracow is greater than Warsaw' rather than the proposition denoted by it is the object of predication, because it is possible that *a* believes that Cracow is greater than Warsaw without believing that Warsaw is smaller than Cracow. The believer *a* is related explicitly to this mode of presentation of the proposition that Cracow is greater than Warsaw.

Second, if the meaning of E is *used* to refer to the denoted object (that we conceive as a function) it can be used either *intensionally* or *extensionally*. If the former, then the *entire function* is an object of predication; and if the latter, then the *functional value* is an object of predication.

Hence we must distinguish between three kinds of an occurrence of a subconstruction D in a construction C.

Hyperintensional context within C: the kind of context in which a construction D occurs in such a way that it is not used to v-construct a function (or its value). Instead the *construction* D itself is the argument of another function; the construction is merely *mentioned*. Only in a hyperintensional context can a construction figure as the subject of predication.

Example. "*a* is solving the equation $\sin(x) = 0$". Here *a* cannot be related to the solution, that is to the class of real numbers $\{\dots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$, because in such a case there would be nothing to solve for *a*. Rather, *a* is related to the *meaning* of '$\sin(x) = 0$', which is the construction $\lambda x\ [[^0Sin\ x] = {}^00]$. He wants to find out which class of real numbers is so constructed. Thus *Solving* is a relation-in-intension of an individual to a construction, and the analysis of the sentence comes down to this construction:

$$\lambda w \lambda t\ [^0Solving_{wt}\ a\ {}^0[\lambda x\ [[^0Sin\ x] = {}^00]]]$$

Types: $Solving/(o\iota*_n)_{\tau\omega}$; $a \rightarrow \iota$; $x \rightarrow \tau$; $Sin/(\tau\tau)$; $0/\tau$; $=/(o\tau\tau)$.

The Closure $\lambda x\ [[^0Sin\ x] = {}^00]$ occurs here hyperintensionally. When evaluating the truth-value of the sentence, we do not evaluate this Closure; it is a matter of *a*. Hence the whole Closure is the (second) argument of the relation *Solving*, the first being *a*.

Intensional context of C: the kind of context in which a construction *D* is *used* intensionally as a constituent of *C* to *v*-construct a function *rather than a particular value* of the function.

Example. “Sine is a trigonometric function.” This sentence expresses the fact that sine belongs to the class of trigonometric functions. Hence the entire function sine rather than its particular value is an object of predication here.

When $Trigonometric/(o(\tau\tau))$ is the class of trigonometric functions of type $(\tau\tau)$, the analysis of the sentence comes down to this Composition:

$$[^0Trigonometric\ {}^0Sin]$$

^0Sin is used *intensionally* within this Composition. It is not composed with a τ-argument in order to construct a value of the sine function. The subject of predication is not a value but this very function.

Extensional context of C: the kind of context in which a construction *D* of a function is used extensionally as an instruction to apply the function in order to *v*-construct a particular value of the function.

Example. “Sine of π equals to zero” expresses the Composition $[[^0Sin\ \pi] = {}^00]$ where ^0Sin occurs extensionally; the Composition is used to construct the value of the sine function at π. Also, in the previous example, $^0Trigonometric$ is used extensionally.

The details, however, are somewhat more involved. The basic idea is that a ‘higher’ context is dominant over a ‘lower’ one. Thus, as we have just showed, in the meaning of the sentence “*a* is solving the equation $\sin(x) =$

0", the Closure $\lambda x\ [[{}^0Sin\ x] = {}^00]$ occurs hyperintensionally and it thus produces a hyperintensional context. And since a higher-order context is dominant over a lower-order one, all the subconstructions of this Closure including the construction of the function sine, that is ${}^0Sin$, occur hyperintensionally as well. Hence the subconstructions $[\lambda x\ [[{}^0Sin\ x] = {}^00]]$, $[[{}^0Sin\ x] = {}^00]$, $[{}^0Sin\ x]$, ${}^0Sin$, x, ^{00} are not constituents of the entire Closure $\lambda w \lambda t\ [{}^0Solving_{wt}\ a\ {}^0[\lambda x\ [[{}^0Sin\ x] = {}^00]]]$. Rather they are only *mentioned* within the second argument of the function v-constructed by ${}^0Solving_{wt}$. The constituents of this Closure are those subconstructions that are *used* (intensionally or extensionally) to construct a function or a functional value. They are: $\lambda w \lambda t\ [{}^0Solving_{wt}\ a\ {}^0[\lambda x\ [[{}^0Sin\ x] = {}^00]]]$, $[{}^0Solving_{wt}\ a\ {}^0[\lambda x\ [[{}^0Sin\ x] = {}^00]]]$, ${}^0Solving_{wt}$, ${}^0Solving_{w}$, ${}^0Solving$, w, t, a and ${}^0[\lambda x\ [[{}^0Sin\ x] = {}^00]]$.

Similarly in the meaning of the sentence "Sine a trigonometric function" the Trivialization ${}^0Sin$ occurs intensionally whereas in the meaning of "The sine of π equals 0" it occurs extensionally. However, if the latter is included in an intensional context, ${}^0Sin$ occurs intensionally. And if included into a hyperintensional context, it occurs hyperintensionally.

The main reason for defining and taking into account these three kinds of context is this. Not respecting particular levels of abstraction yields many paradoxes and fallacies that arise from an incorrect application of extensional rules like Leibniz's law of substitution of identicals and the rule of existential generalisation.

Traditionally, the validity of extensional rules has been fielded as a logical criterion for distinguishing (*i*) extensional/ transparent/'relational' contexts from (*ii*) non-extensional/opaque/'notional' contexts. The idea is that extensional (etc.) contexts are those that validate rules of substation and quantifying-in. What we are saying is that these rules are valid also in intensional and hyperintensional contexts, but that the feasibility of applying them presupposes that it be done within an extensional logic of hyperintensionals. Deploying a non-extensional logic of hyperintensions generates opacity and thus makes (hyper)intensional contexts logically intractable.[5] Tichý issues in (1986, 256; 2004, 654) a warning against inter-defining the notion of extensional context and the validity of the rules of substitution of co-referring terms and existential generalization on pain of circularity (where TIL and Quine agree on the use of 'co-referential'):

[5] Here I draw on material from Duží – Jespersen (2012) and (2013) where more details can be found.

Q: When is a context extensional?
A: A context is extensional if it validates (*i*) the rule of substitution of co-referential terms and (*ii*) the rule of existential generalization.
Q: And when are (*i*), (*ii*) valid?
A: Those two rules are valid when applied to extensional contexts.

We steer clear of the circle by defining extensionality for (*i*) *hyperintensions* presenting functions, for (*ii*) *functions* (including possible-world intensions), and for (*iii*) *functional values*. These three levels are squared off with the three kinds of context as introduced above.

The last notion we will need is that of *procedural isomorphism*. Laying out the required semantics requires a fair amount of footwork. The main problem we encounter here is the problem how to define synonymy. The solution might seem to be simple; two expressions are synonymous if they have the same meaning. Since we explicate meanings as constructions, the related problem to solve is the individuation of constructions. When operating on hyperintensional level the individuation up to equivalence is too coarse-grained, since different constructions may be equivalent by constructing one and the same object. On the other hand, constructions are too fine-grained from the procedural point of view. Our working hypothesis is that hyperintensional individuation is procedural individuation and that the relevant procedures are isomorphic modulo α- or η- or restricted β-convertibility. Any two terms or expressions whose respective meanings are procedurally isomorphic are deemed semantically indistinguishable, hence synonymous.

The degree to which 'functions-in-intension' should be fine-grained was of the outmost importance for Church.[6] When summarising Church's Alternatives, Anderson (1998, 162) presents these options considered by Church. Senses are identical if the respective expressions are (A0) 'synonymously isomorphic', (A1) mutually λ-convertible, (A2) logically equivalent. (A0) is α-conversion and synonymies resting on meaning postulates; (A1) is α- and β-conversion; Church also considered Alternative (A1′) that is α-, β- and η-conversion; (A2) is logical equivalence (see Church 1993). (A2), the weakest criterion, was refuted already by Carnap in his (1947), and would not be acceptable to Church, anyway. (A1) is surely more fine-

[6] For Church, functions-in-intension are modes of presentation of functions-in-extensions that is set-theoretical mappings. Hence functions-in-intension roughly correspond to our constructions.

grained. However, we are not willing to include unrestricted β-conversion. The reasons are these. First, β-conversion is not guaranteed to be an equivalent transformation as soon as partial functions are involved. Second, even in those cases when β-reduction is an equivalent transformation, it can yield a loss of analytic information.[7]

Church's Alternatives (0) and (1) leave room for additional Alternatives. One such would be Alternative (½), another Alternative (¾).[8] The former includes α- and η-conversion while the latter adds a *restricted* β-conversion by name. If we must choose, we would prefer Alternative (¾) to soak up those differences between β-transformations that concern only λ-bound variables and thus (at least appear to) lack natural-language counterparts.

Another reason for excluding unrestricted β-conversion is that occasionally even β-equivalent constructions have different natural-language counterparts; witness the difference between attitude reports *de dicto* vs. *de re*. Thus the difference between "*a* believes that Warsaw is smaller than Cracow" and "Warsaw is believed by *a* to be smaller than Cracow" is just the difference between β-equivalent meanings provided the meaning of the 'Warsaw' is a proper construction of an individual. Where attitudes are construed as in possible-world semantics, that is as relations to intensions (rather than hyperintensions), the attitude *de dicto* receives the analysis

$$\lambda w \lambda t\ [{}^0\mathit{Believe}_{wt}\ a\ \lambda w \lambda t\ [{}^0\mathit{Smaller}_{wt}\ {}^0\mathit{Warsaw}\ {}^0\mathit{Cracow}]]$$

while the attitude *de re* receives the analysis

$$\lambda w \lambda t\ [\lambda x\ [{}^0\mathit{Believe}_{wt}\ a\ \lambda w \lambda t\ [{}^0\mathit{Smaller}_{wt}\ x\ {}^0\mathit{Cracow}]]\ {}^0\mathit{Warsaw}]$$

Types: $\mathit{Smaller}/(o\iota\iota)_{\tau\omega}$; $x \rightarrow_v \iota$; Warsaw, Cracow/ι; $\mathit{Believe}/(o\iota o_{\tau\omega})_{\tau\omega}$.

The *de dicto* variant is the β-equivalent contractum of the *de re* variant. The variants are equivalent because they construct one and the same proposition, the two sentences denoting the same truth-condition. Yet they denote this proposition in *different ways*, hence they are not synonymous. The equivalent β-reduction leads here to a *loss of analytic* information, namely loss of information about *which* of the two ways, or *construc-*

7 For the notion of analytic information, see Duží (2010) and Duží et al. (2010, §5.4). The solution of the problem of the loss of analytic information is proposed in Duží – Jespersen (2013).

8 For (A½) see Jespersen (2010).

tions, has been used to construct this proposition. In this particular case the loss seems to be harmless, though, because there is only one, hence unambiguous, way to β-expand the *de dicto* version into its equivalent *de re* variant.[9]

However, unrestricted equivalent β-reduction sometimes yields a loss of analytic information that cannot be restored by β-expansion. Here is an example. The Compositions

(C_1) $[\lambda x\ [{}^0{+}\ x\ {}^0 1]\ {}^0 3]$
(C_2) $[\lambda y\ [{}^0{+}\ {}^0 3\ y]\ {}^0 1]$

both β-reduce to the contractum $[{}^0{+}\ {}^0 3\ {}^0 1]$. It is uncontroversial that the contractum can be equivalently expanded back both to (C_1) and (C_2). However, the problem is that there is no way to reconstruct *which* of (C_1), (C_2) would be the correct redex. We do not know which function has been applied to which argument.

The *restricted* version of *equivalent* β-conversion we have in mind consists in substituting free variables for λ-bound variables of the same type, and will be called *β_r-conversion*. Restricted β-conversion is just a formal manipulation with λ-bound variables that has much in common with η-conversion and less with β-reduction. The latter is the operation of applying a function $f/(\beta\alpha)$ to its argument value a/α in order to obtain the value of f at a (leaving it open whether a value emerges). It is the fundamental computational rule of functional programming languages. Thus if f is constructed by the Closure $C = \lambda x\ [\ldots\ x\ \ldots]$ then β-reduction is here the operation of calling the procedure C with a formal parameter x at the actual parameter value a: $[\lambda x\ [\ldots\ x\ \ldots]\ {}^0 a]$. Now a construction of the value a is substituted for x and the 'body' of the procedure C is computed, which means that the Composition $[\ldots\ {}^0 a\ \ldots]$ is evaluated in order to obtain the value of the function f at a.

No such features can be found in β_r-reduction. If a variable $y \rightarrow_v \alpha$ is not free in C then the β_r-contractum of $[\lambda x\ [\ldots\ x\ \ldots]\ y]$ is $[\ldots\ y\ \ldots]$. Now

[9] In general, *de dicto* and *de re* attitudes are not equivalent, but logically independent. Consider "*a* believes that the Pope is not the Pope" and "*a* believes *of* the Pope that *he* is not the Pope". The former, *de dicto*, variant makes *a* deeply irrational and most likely is not a true attribution, while the latter, *de re*, attribution is perfectly reasonable and most likely the right one to make. In TIL the *de dicto* variant is *not* an equivalent β-contractum of the *de re* variant due to the partiality of the role $Pope/\iota_{\tau\omega}$.

the evaluation of the Composition [... y ...] does not yield a value of f. As a result we just obtain a formal simplification of [λx [... x ...] y].

For instance, we see little reason to differentiate semantically or logically between "b is believed by a to be happy" and "b has the property of being believed by a to be happy".[10] The latter sentence expresses

$$\lambda w \lambda t\ [[\lambda w' \lambda t'\ [\lambda x\ [{}^0 Believe_{w't'}\ {}^0 a\ \lambda w \lambda t\ [{}^0 Happy_{wt}\ x]]]]_{wt}\ {}^0 b]$$

This is merely a β_r-expanded form of

$$\lambda w \lambda t\ [\lambda x\ [{}^0 Believe_{wt}\ {}^0 a\ \lambda w \lambda t\ [{}^0 Happy_{wt}\ x]]\ {}^0 b]$$

Thus we define:

Definition 4 (*procedurally isomorphic constructions: Alternative* (¾))
Let C, D be constructions. Then C, D are *α-equivalent* iff they differ at most by deploying different λ-bound variables. C, D are *η-equivalent* iff one arises from the other by η-reduction or η-expansion. C, D are *β_r-equivalent* iff one arises from the other by β_r-reduction or β_r-expansion. C, D are *procedurally isomorphic*, denoted '${}^0C \approx_* {}^0D$', $\approx_*/(o*_n*_n)$, iff there are closed constructions $C_1,\dots,C_m$, $m \geq 1$, such that ${}^0C = {}^0C_1$, ${}^0D = {}^0C_m$, and all C_i, C_{i+1} ($1 \leq i < m$) are either α-, η- or β_r-equivalent. □

There are two weaker relations between constructions that we I will need as well. They are equivalency and v-congruency:

Definition 5 (*congruency and equivalence of constructions*)
Let C, $D/*_n \rightarrow \alpha$ be constructions, and $\approx_v /(o*_n*_n)$, $\approx /(o*_n*_n)$ binary relations between constructions of order n. Then
C, D are *v-congruent*, ${}^0C \approx_v {}^0D$, iff either C and D v-construct the same α-entity, or both C and D are v-improper;
C, D are *equivalent*, ${}^0C \approx {}^0D$, iff C, D are v-congruent for all valuations v. □

---

[10] This is not to say we see no reason at all not to differentiate. For instance, it could be argued that one thing is to believe that a is happy and another is to believe that a has the property of being happy, because the latter at least appears to presuppose that the believer have the additional conceptual resources to master the notion of *property*. Or if the believer is a self-assured nominalist then he may protest that while he does believe that a is happy he does not believe that a has any properties. Further research is required to decide one way or the other.

Corollaries

If C, D are *procedurally isomorphic*, then C, D are equivalent, but not *vice versa*: ${}^0C \approx_* {}^0D \Rightarrow {}^0C \approx {}^0D$.

If C, D are equivalent, then C, D are v-congruent, but not *vice versa*: ${}^0C \approx {}^0D \Rightarrow {}^0C \approx_v {}^0D$.

Examples

a) Expressions 'President of Czech Republic' and 'the husband of Livia Klaus' are co-referentional. They just contingently happen to refer to the same individual, Václav Klaus, in the given world and time. After March 8th 2013 they will be no more co-referential. Hence their meanings are *v-congruent* in the given $\langle w, t\rangle$: $[\lambda w\lambda t\ [{}^0President\_of_{wt}\ {}^0CR]]_{wt} \approx_v [\lambda w\lambda t\ [{}^0Husband\_of_{wt}\ {}^0Livia]]_{wt}$

b) Assume that 'Pope' and 'the head of Catholic church' are co-denotational terms by denoting one and the same office. Then their meanings are *equivalent*: ${}^0Pope \approx \lambda w\lambda t\ [{}^0Head\_of_{wt}\ {}^0Catholics]$

c) Assume that the expressions 'azure' and 'sky-blue' are synonymous. Then their meanings are procedurally isomorphic: ${}^0Azure \approx_* {}^0Sky\_Blue$

So much for the logical and philosophical foundations of TIL as it is in 2010. As mentioned above, Tichý defined a sequent calculus only for pre-1988 TIL that differed from the current version of TIL in these three main issues. First, it was based on simple hierarchy of types. Second, as a consequence of the first, pre-1988 TIL constructions did not involve Trivialisation and Double Execution. An object was a construction of itself. Hence this version did not, strictly speaking, distinguish between an object and a mode of presentation of the object. Finally, as a result, constructions were not objects *sui generis*. They could be only used to construct objects but could not figure as arguments of functions. In other words, pre-1988 TIL did not take into account hyperintensional contexts in which we operate on constructions.[11]

[11] In his (1988) Tichý deals with inference in Chapter 13 where he discusses the distinction between a one-dimensional and two-dimensional conception of proofs and argues for the latter. He provides logical and philosophical reasons for his conception of a two-dimensional inference. The two-dimensional view is no doubt a rigorous explication of the way to execute proofs correctly. However, Tichý does not develop a new proof calculus for TIL-1988, nor does he compare the two-dimensional inference and the sequent calculus for TIL as introduced earlier in his (1982) and (1986). Actually,

2. Tichý's sequent calculus

When defining extensional rules for operating in (hyper-)intensional contexts we encounter two main problems, namely the problem of *substitution* of identicals (Leibniz) and *existential generalization*. Tichý proposed a solution of the substitution and existential generalization problem in his (1982, 1986) and defined a sequent calculus for the pre-1988 TIL, that is for extensional and intensional contexts. Moreover, the solution is restricted to the so-called linguistic constructions of the form $\lambda w \lambda t\ [C_1\ C_2 \ldots C_m]$ or $\lambda w \lambda t\ [\lambda x_1 \ldots x_m\ C]$. In order to explain and recapitulate Tichý's calculus and rules I will now use terminology as introduced above. In particular I will speak about a (hyper-)intensional and extensional context though Tichý does not use these terms.

2.1. Substitution and existential generalization

a) *Substitution.* $a = b;\ C(a/x) \vdash C(b/x)$

This rule seems to be invalid in intensional contexts. For instance, the following argument is obviously invalid:

The President of ČR is the husband of Livie.
Miloš Zeman has been elected for the President of ČR.
———————————————————————
Miloš Zeman has been elected for the husband of Livie.

b) *Existential generalization.* $C(a/x) \vdash \exists x\ C(x)$

Again, in intensional contexts this rule seems to be invalid. For instance, the following argument is obviously invalid:

Miloš Zeman wants to be the President of ČR.
———————————————————————
The President of ČR exists.

Now we must take into account that Tichý solves these problems only for a particular case of linguistic constructions. Thus he does not define e.g. substitution of identicals in general. He specifies the intensional de-

---

the adoption of the sequent calculus is not necessarily connected with the two-dimensional inference, as was evident in Gentzen's work.

scent of a construction C with respect to w, t, or both, and proves under which conditions is the so-descended construction substitutable for another construction.

Ad a) In order to solve the problem of substitution, Tichý introduces in (1986) the notion of *hospitality* of a construction for a variable z occurring in a construction $C(z)$. In principle, there are four cases. If a variable z is (1,1) hospitable, then the construction of the form $[X_{wt}]$ is substitutable for z. That is, z occurs in an extensional (*de re*) context. If a variable z is (1,0) hospitable, then the construction of the form $[X\ \boldsymbol{w}]$ is substitutable for z. That is, z occurs in an intensional (*de dicto*) context with respect to time t. If a variable z is (0,1) hospitable, then the construction of the form $[X\ \boldsymbol{t}]$ is substitutable for z. That is, z occurs in an intensional (*de dicto*) context with respect to a world w. Finally, if a variable z is (0,0) hospitable, then the construction of the form X is substitutable for z. That is, z occurs in an intensional (*de dicto*) context with respect to both t and w.

Ad b) Existential generalization. Tichý first defines an *exposure* of a variable. In brief, a variable $z \rightarrow \alpha$ is exposed in a construction C if it is free and occurs extensionally in C, that is it does not occur in an intensional context like $\lambda t\ [\ldots z\ldots]$. Second, he takes into account the *hospitality* of a variable z. Then he defines the rule of existential generalisation for extensional contexts like this.

> Let $x \rightarrow \alpha$ be (1,1)-hospitable and let $D(k,l)$, $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq l \leq 1$, be a construction substitutable for x in a construction $C(x)$. Then the following rule is valid:
>
> $$\lambda w \lambda t\ C(D(k,l)/x) \vdash \lambda w \lambda t\ \exists x\ C(x)$$

This rule needs to be explained. First, $D(k,l) \rightarrow \alpha$, $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq l \leq 1$, is an abbreviation for a construction of one of these forms D_{wt}, D_w, D_t, D. Second, if x is exposed and (1,1)-hospitable then the existential generalisation is valid.

Example. "The president of the Czech Republic is an economist."

$$\lambda w \lambda t\ [{}^0Economist_{wt}\ {}^0PCR_{wt}] \vdash \lambda w \lambda t\ \exists x\ [{}^0Economist_{wt}\ x];$$

Types. $Economist/(o\iota)_{\tau\omega}$; $PCR/\iota_{\tau\omega}$: the office of the president of CR; $x \rightarrow_v \iota$.

2.2. Sequent calculus

The basic notions we need are these.

Match is a pair $a{:}C$, where a, $C \to \alpha$ and a is an atomic construction. A match $a{:}C$ is *satisfied* by a valuation v, if a and C v-construct the same object; match $:C$ is satisfied by v, if C is v-improper; matches $a{:}C$ and $b{:}C$ are *incompatible,* if a, b construct different objects; matches $a{:}C$, $:C$ are *incompatible.*

Sequent is a tuple of the form $a_1{:}C_1, \ldots, a_m{:}C_m \rightarrow b{:}D$, for which we use a generic notation $\Phi \rightarrow \Psi$; A sequent $\Phi \rightarrow \Psi$ is *valid* if each valuation satisfying Φ satisfies also Ψ;

Remark. Note that due to this definition a valid sequent can be viewed as a valid argument. Thus Tichý actually applies here his two-dimensional conception of inference introduced later in 1988 book though he does not explicitly speak about the two-dimensional inference in his 1982 paper.

The rules preserving validity of sequents are specified like this.

Structural rules.

1. $|| \ \Phi \rightarrow \Psi$, if $\Psi \in \Phi$ (trivial sequent)
2. $\Phi \rightarrow \Psi \ || \ \Phi_s \rightarrow \Psi$, if $\Phi \subseteq \Phi_s$ (redundant match due to monotonicity)
3. $\Phi, \vartheta \rightarrow \Psi; \ \Phi \rightarrow \vartheta \ || \Phi \rightarrow \Psi$ (simplification)
4. $|| \ \Phi \rightarrow \mathrm{y{:}y}$ (trivial match)
5. $\Phi \rightarrow \vartheta_1; \ \Phi \rightarrow \vartheta_2 \ || \ \Phi \rightarrow \Psi$, if ϑ_1 and ϑ_2 are incompatible
6. $\Phi, :\vartheta \rightarrow \Psi; \ \Phi, y{:}\vartheta \rightarrow \Psi \ || \Phi \rightarrow \Psi$ (y is not free in Φ, Ψ)

Application rules.

7. *a-instance* (modus ponens):
   $\Phi \rightarrow y{:}[FX_1 \ldots X_m], \ \Phi, f{:}F, x_1{:}X_1, \ldots, x_m{:}X_m \rightarrow \Psi \ || \ \Phi \rightarrow \Psi$
   (f, x_i, different variables, free in Φ, Ψ, F, X_i)
8. *a-substitution*:
   (*i*) $\Phi \rightarrow y{:}[FX_1 \ldots X_m], \ \Phi \rightarrow x_1{:}X_1, \ldots, \Phi \rightarrow x_m{:}X_m \ || \ \Phi \rightarrow y{:}[Fx_1 \ldots x_m]$
   (*ii*) $\Phi \rightarrow y{:}[Fx_1 \ldots x_m]; \ \Phi \rightarrow x_1{:}X_1, \ldots, \ \Phi \rightarrow x_m{:}X_m \ || \ \Phi \rightarrow y{:}[FX_1 \ldots X_m]$
9. *extensionality*:
   $\Phi, y{:}[f\,x_1 \ldots x_m] \rightarrow y{:}[g\,x_1 \ldots x_m]; \ \Phi, y{:}[g\,x_1 \ldots x_m] \rightarrow y{:}[f\,x_1 \ldots x_m] \ ||$
   $\Phi \rightarrow f{:}g$
   (y, $x_1, \ldots, x_m$ are different variables that are not free in Φ, f, g.)

λ-rules.

10. $\Phi, f{:}\lambda x_1 \ldots x_m Y \rightarrow \Psi \,||\, \Phi \rightarrow \Psi$ (f is not free in Φ, Y, Ψ)
11. β-reduction:
    $\Phi \rightarrow y{:}[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m] \,||\, \Phi \rightarrow y{:}Y(X_1 \ldots X_m / x_1 \ldots x_m)$
    (X_i is substitutable for x_i)
12. β-expansion:
    $\Phi \rightarrow x_1{:}X_1; \ldots; \Phi \rightarrow x_m{:}X_m; \Phi \rightarrow y{:}Y(X_1 \ldots X_m / x_1 \ldots x_m) \,||$
    $\Phi \rightarrow y{:}[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m]$

So much for Tichý's proof calculus as he introduced it in the two papers (1982) and (1986). In the next Section 3 I am going to generalize the calculus for TIL 2010 as presented in Duží – Jespersen – Materna (2010).

3. Generalization for TIL 2010

Our goal is to generalize the calculus so that it involves *ramified theory of types*, *all kinds* of constructions that is not only Tichý's linguistic constructions, existential generalization to *any context* and substitution of identicals in any kind of context be it extensional, intensional or hyperintensional. For the sake of convenience I first briefly recapitulate the free kinds of context as introduced in Section 1.

3.1. Three kinds of context

Constructions are full-fledged objects that can be not only used to construct an object (if any) but also serve themselves as input/output objects on which other constructions (of a higher-order) operate. Thus we have:

Hyperintensional context: the sort of context in which a construction is not used to *v*-construct an object. Instead, the construction itself is an argument of another function; the construction is just mentioned.

Example. "Charles is solving the equation $1 + x = 3$." When solving the equation, Charles wants to find out which set (here a singleton) is constructed by the Closure $\lambda x\ [{}^0{=}\ [{}^0{+}\ {}^0 1\ x]\ {}^0 3]$. Hence this Closure must occur hyperintensionally, because Charles is related to the Closure itself rather than its product, a particular set. Otherwise the seeker would be immediately a finder and Charles 's solving would be a pointless activity. The analysis comes down to:

$\lambda w \lambda t\ [{}^0Solve_{wt}\ {}^0Charles\ {}^0[\lambda x\ [{}^0{=}\ [{}^0{+}\ {}^01\ x\ ]\ {}^03]]]$.

Intensional context: the sort of context in which a construction C is used to v-construct a function f but not a particular value of f; moreover, C does not occur within another hyperintensional context.

Example. "Charles wants to be The President of Finland." Charles is related to the office itself rather than to its occupier, if any. Thus the Closure $\lambda w \lambda t\ [{}^0President\_of_{wt}\ {}^0Finland]$ must occur intensionally, because it is not used to v-construct the holder of the office (particular individual, if any). The sentence is assigned as its analysis the construction

$\lambda w \lambda t\ [{}^0Want\_to\_be_{wt}\ {}^0Charles\ \lambda w \lambda t\ [{}^0President\_of_{wt}\ {}^0Finland]]$.

Extensional context: the sort of context in which a construction C of a function f is used to construct a particular value of f at a given argument, and C does not occur within another intensional or hyperintensional context.

Example. "The President of Finland is watching TV." The analysis of this sentence comes down to the Closure

$\lambda w \lambda t\ [{}^0Watch_{wt}\ \lambda w \lambda t\ [{}^0President\_of_{wt}\ {}^0Finland]_{wt}\ {}^0TV]$.

The meaning of 'the President of Finland' occurs here with *de re* supposition, i.e. extensionally.

3.2. Extensional calculus of hyperintensions

In this section I generalise Tichý's extensional rules for substitution and existential generalization so that they be applicable to constructions of any kind (not only linguistic) and in any context. Moreover, I am going to explain the way in which partiality is being 'propagated up', and finally I will deal with the problem of β-conversion.

3.2.1. Rules of existential generalisation

Now I specify the *rules for existential generalisation* into the three kinds of context.[12] These rules will be specified in a schematic way. Let $F \rightarrow (\alpha\beta)$; $a \rightarrow \alpha$. We will examine an extensional, intensional and hyperinten-

[12] For details see Duží (2012) and Duží – Jespersen (2012).

sional occurrence of a construction of the schematic form [... [*F a*] ...] within a construction *D*.

a) *Extensional* context

Let an occurrence of a construction [... [*F a*] ...] be extensional and let it *v*-construct the truth-value **T**. Then the following rule is truth-preserving:

$$[\ldots [F\ a] \ldots] \vdash \exists x\, [\ldots [F\ x] \ldots]; \quad x \to_v \alpha$$

Example. Pope is wise. $\models$ Somebody is wise.

$$\lambda w \lambda t\ [{}^0 Wise_{wt}\ {}^0 Pope_{wt}] \models \lambda w \lambda t\ \exists x\ [{}^0 Wise_{wt}\ x].$$

Types: $Wise/(o\iota)_{\tau\omega}$; $Pope/\iota_{\tau\omega}$; $x \to \iota$.

Hence we can quantify into an extensional context by an abstraction over the *value* of the function constructed by *F*. This is quite comprehensible. In an extensional context the value of the function is an object of predication.

b) *Intensional* context

Let [*F a*] occur intensionally in a construction [... [*F a*] ...] that *v*-constructs **T**. Then the following rule is truth-preserving:

$$[\ldots [F\ a] \ldots] \vdash \exists f\, [\ldots [f\ a] \ldots]; f \to_v (\alpha\beta)$$

Example. *b* believes that Pope is wise. $\models$ There is an office such that *b* believes that its holder is wise.

$$\lambda w \lambda t\ [{}^0 Believe_{wt}\ {}^0 b\ \lambda w \lambda t\ [{}^0 Wise_{wt}\ {}^0 Pope_{wt}]] \models$$
$$\lambda w \lambda t\ \exists f\, [{}^0 Believe_{wt}\ {}^0 b\ \lambda w \lambda t\ [{}^0 Wise_{wt}\, f_{wt}]].$$

Types: $Believe/(o\iota o_{\tau\omega})_{\tau\omega}$: an intensional belief; b/ι; $Wise/(o\iota)_{\tau\omega}$; $Pope/\iota_{\tau\omega}$; $f \to \iota_{\tau\omega}$.

In an intensional context we cannot quantify over the value of a function, because the entire function is an object of predication. Hence we must quantify over the entire function.

c) *Hyperintensional* context

Let [*F a*] occur hyperintensionally in a construction [... ^{0}[... [*F a*] ...] ...] that *v*-constructs **T**. Now if we want to validly quantify into hyperpropositional context, we come up against a major technical complication. An attempt analogous to the intensional one above yields:

$$\frac{[\ldots\ {}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]\ \ldots]}{\exists f\,[\ldots\ {}^0[\ldots\ [f\,a]\ \ldots]\ \ldots];\ f \rightarrow_v (\alpha\beta)}$$

Why is the conclusion no good? The occurrence of f in ${}^0[\ldots\ [f\,a]\ \ldots]$ – notice the leftmost Trivialization – is ^{0}bound that is bound by Trivialisation, because the variable f occurs within the hyperintensional context of the construction $[\ldots\ [f\,a]\ \ldots]$. So f is *mentioned*, hence not available for a direct logical manipulation. It is shielded from $\exists$ by Trivialization in ${}^0[\ldots\ [f\,a]\ \ldots]$.

Yet it would be a serious flaw of an extensional logic of hyperintensions if one of the fundamental extensional rules were not applicable in a hyperintensional context. For instance, from the premise that *a* believes* (hyperintensionally) that the Evening Star is a planet it does follow that there is a concept *ES* of an individual role *Evening_Star*/$\iota_{\tau\omega}$ such that *a* believes* that its occupant is a planet. But how?

First, we must realize that in a hyperintensional context the object of predication is a *construction* of a function. Hence we must quantify over construction. Second, the solution consists in the application of the following *substitution technique*. A valid argument is obtained by applying the function *Sub* of the polymorphous type $(*_n *_n *_n *_n)$ that operates on constructions in this way. Let X, Y, Z be constructions of order n. Then *Sub* is a mapping which, when applied to $\langle X, Y, Z\rangle$, returns the construction that is the result of correctly substituting X for Y in Z. A correct substitution is one that does not make any variable occurring free in X become bound in the resulting construction (no 'collision'). For illustration, the Composition $[{}^0Sub\ {}^{00}2\ {}^0x\ {}^0[{}^0{+}\ x\ {}^01]]$ constructs the result of substituting ^{02} for x into $[{}^0{+}\ x\ {}^01]$, which is the Composition $[{}^0{+}\ {}^02\ {}^01]$. Therefore, the Composition $[{}^0Sub\ {}^{00}2\ {}^0x\ {}^0[{}^0{+}\ x\ {}^01]]$ is equivalent to ${}^0[{}^0{+}\ {}^02\ {}^01]$, both constructing the Composition $[{}^0{+}\ {}^02\ {}^01]$.

In Duží – Jespersen (submitted) we analyze four different arguments that share the same premise, but have different conclusions. Two of them are invalid, while the first of the valid ones leads up to the solution of the problem of quantifying into hyperpropositional contexts. Here I reproduce the two valid rules and introduce another one, which I argue for as the most general one.

$$(1) \quad \frac{[\ldots\ {}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]\ \ldots]}{[{}^0\exists^*\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0c\ {}^0[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]]\ \ldots]]}$$

Types: $\exists^*/(o(o*_n))$; $c \rightarrow_v *_n$; ${}^2c \rightarrow_v (\alpha\beta)$

Proof.
(i) ${}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]$ constructs $[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]$ $\varnothing$
(ii) $[{}^0Sub\ c\ {}^0c\ {}^0[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]]$ $v(F/c)$-constructs the construction $[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]$; (the first occurrence of c is free)
(iii) $\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0c\ {}^0[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]]\ \ldots]$ constructs a non-empty class of constructions
(iv) $[{}^0\exists^*\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0c\ {}^0[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]]\ \ldots]]$

Note, however, that $[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]$ in the conclusion of (1) comes with *wrong typing* and so is necessarily an *improper* Composition. The variable c ranges over constructions rather than functions, so c cannot be Composed with an argument of a function (see Definition 2, *iii*)). To be sure, the improperness of a construction matters only if the construction is introduced as *used* in order to produce a product, at which it fails. If a construction is merely *mentioned* as an argument of a function, it occurs as an ordinary object that can be operated on, and its failure to produce a product is logically immaterial.

In the present case $[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]$ is an argument of *Sub*, and the Composition $[{}^0Sub\ c\ {}^0c\ {}^0[\ldots\ [c\ a]\ \ldots]]$ is a *proper* constituent, because c v-constructs a construction of a *function*. In a word, *lazy* evaluation of c in this Composition is an option because the second and third occurrence of c is Trivialization-bound, i.e. mentioned. But, though technically feasible, it is methodologically and philosophically unsatisfactory that wrong typing should be an integral part of the solution. Fortunately, there are attractive alternatives:

$$(2) \quad \frac{[\ldots\ {}^0[\ \ldots\ [F\ a]\ \ldots]\ldots]}{[{}^0\exists^*\lambda c\ [\ldots[{}^0Sub\ c\ F\ {}^0[\ \ldots\ [F\ a]\ \ldots]]\ldots]]}$$

Proof.
(i) the Composition $[{}^0Sub\ c\ {}^0F\ {}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]]$ $v(F/c)$-constructs ${}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]]$
(ii) the Closure $\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0F\ {}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]]\ \ldots]$ constructs a non-empty class
(iii) $[{}^0\exists^*\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0F\ {}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]]\ \ldots]]$

This rule does not have a flaw of wrong typing. Yet it is not general enough. The reason is this. The construction F may have more than one occurrence in the hyperintensional context and we may want to quantify only over some of these occurrences. Hence the *general rule for quantifying into* hyperpropositional attitudes is this:[13]

$$\text{(3)} \qquad \frac{[\ldots\ {}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]\ \ldots]}{[{}^0\exists^*\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0d\ {}^0[\ldots\ [d\ a]\ \ldots]]\ \ldots]]}$$

Additional type: $d \rightarrow (\alpha\beta)$.

Proof.
(*i*) the Composition $[{}^0Sub\ c\ {}^0d\ {}^0[\ldots\ [d\ a]\ \ldots]]$ $v(F/c)$-constructs ${}^0[\ldots\ [F\ a]\ \ldots]]$
(*ii*) the Closure $\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0d\ {}^0[\ldots\ [d\ a]\ \ldots]]\ \ldots]$ constructs a non-empty class
(*iii*) $[{}^0\exists^*\lambda c\ [\ldots\ [{}^0Sub\ c\ {}^0d\ {}^0[\ldots\ [d\ a]\ \ldots]]\ \ldots]]$

Example.

b believes* that Pope is wise. ⊨ There is a concept of an office such that *b* believes* that its holder is wise.
$\lambda w\lambda t\ [{}^0Believe^*_{wt}\ {}^0b\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Wise_{wt}\ {}^0Pope_{wt}]] \models \lambda w\lambda t\ \exists^*c\ [{}^0Believe^*_{wt}\ {}^0b\ [{}^0Sub\ c\ {}^0d\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Wise_{wt}\ d_{wt}]]]]$;

Types: $Believe^*/(o\iota{*_n})_{\tau\omega}$: hyperpropositional attitude; $c \rightarrow_v *_n$; ${}^2c \rightarrow_v \iota_{\tau\omega}$; $d \rightarrow_v \iota_{\tau\omega}$.

If we wanted to infer more, namely that there is an *office* such that *b* believes* that its holder is wise, we would need another assumption, namely that the construction of this office is proper. In this case this additional assumption is valid, because the Trivialisation ${}^0Pope$ is not v-improper for any valuation v. Hence a stronger argument is also valid:

[13] This solution has been suggested by Jakub Macek as a reaction to (1). I am indebted to him for making this suggestion.

b believes* that Pope is wise. ⊨ There is an office such that *b* believes* that its holder is wise.
$\lambda w\lambda t\ [[{}^0Believe^*_{wt}\ {}^0b\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Wise_{wt}\ {}^0Pope_{wt}]] \wedge [{}^0Proper\ {}^0Pope]] \models$
$\lambda w\lambda t\ \exists f \exists^* c\ [[f = {}^2c] \wedge [{}^0Believe^*_{wt}\ {}^0b\ [{}^0Sub\ c\ {}^0d\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Wise_{wt}\ d_{wt}]]]]]];$

Additional type: $f \rightarrow \iota_{\tau\omega}$.

3.2.2. Substitution

In order to specify *substitution of identicals* (Leibniz) in the three kinds of context, recall Definitions 4 and 5 of *v*-congruent, equivalent and procedurally isomorphic constructions. It should be clear now that

a) In a *hyperintensional context* (propositional attitudes, mathematical sentences, ...) substitution of *procedurally isomorphic* (but neither equivalent nor *v*-congruent) constructions is valid.
b) In an *intensional context* (modalities, some notional attitudes, ...) substitution of *equivalent* or procedurally isomorphic (but not only *v*-congruent) constructions is valid;
c) In an extensional context substitution of *v-congruent* (or equivalent or procedurally isomorphic) constructions is valid.

Examples.
a) extensional context

The temperature in Amsterdam is the same
as the temperature in Prague.
The temperature in Amsterdam is 20 ^{0}C.
———————————————————
The temperature in Prague is 20 ^{0}C.

Proof of the validity of this argument. In any ⟨*w*, *t*⟩-pair the following steps are truth-preserving:

1. $[{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam] = [{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Prague]$ assumption
2. $[{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam] = {}^020$ assumption
3. $[{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Prague] = {}^020$ substitution 1, 2

Types: $Temperature\_in/(\tau\iota)_{\tau\omega}$; *Amsterdam*, *Prague*/ι; 20/τ.

b) intensional context

To illustrate invalidity of substitution of *v*-congruent constructions in an intensional context, consider an example of B. Partee:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{The temperature in Amsterdam is rising.}\\ \text{The temperature in Amsterdam is 20 }{}^0\text{C.}\end{array}}{20\ {}^0\text{C is rising.}}$$

1. $[{}^0Rising_{wt}\ \lambda w\lambda t\ [{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam]]$ assumption
2. $[{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam] = {}^0 20$ assumption
3. $[{}^0Rising_{wt}\ {}^0 20]$???

Additional types: $Rising/(o\tau_{\tau\omega})_{\tau\omega}$: the property of magnitude; $\lambda w\lambda t\ [{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam] \rightarrow \tau_{\tau\omega}$.

The last step is invalid. In the first assumption the Composition $[{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam]$ occurs intensionally. To be rising is the property of magnitude (function) rather than of its value. Hence *v*-congruent constructions $[{}^0Temperature\_in_{wt}\ {}^0Amsterdam]$, ${}^0 20$ cannot be mutually substituted.

As a valid argument we can adduce the recent one:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Benedict XVI resigns as Pope.}\\ \text{Pope is the same office as the Head of the Catholic church.}\end{array}}{\text{Benedict XVI resigns as the Head of Catholic church.}}$$

Proof of the validity of this argument. In any $\langle w, t\rangle$-pair the following steps are truth-preserving:

1. $[{}^0Resign_{wt}\ {}^0Benedict\ {}^0Pope]$ assumption
2. $[{}^0Pope = \lambda w\lambda t\ [{}^0Head\_of_{wt}\ {}^0Catholics]]$ assumption
3. $[{}^0Resign_{wt}\ {}^0Benedict\ \lambda w\lambda t\ [{}^0Head\_of_{wt}\ {}^0Catholics]]$ substitution 1, 2

Types: $Resign/(o\iota\iota_{\tau\omega})_{\tau\omega}$; $Pope/\iota_{\tau\omega}$; $Benedict/\iota$.

c) hyperintensional context

To illustrate invalidity of substitution of *equivalent* constructions in a hyperintensional context, consider this example:

Marie knows* that Benedict XVI resigns as Pope.
Pope is the same office as the Head of the Catholic Church.
———————————————————————————————
Marie knows* that Benedict XVI resigns as the Head of the Catholic Church.

1. $[{}^0Know^*_{wt}\ {}^0Marie\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Resign_{wt}\ {}^0Benedict\ {}^0Pope]]]$ assumption
2. $[{}^0Pope = \lambda w\lambda t\ [{}^0Head\_of_{wt}\ {}^0Catholics]]$ assumption
3. $[{}^0Know^*_{wt}\ {}^0Marie\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Resign_{wt}\ {}^0Benedict\ \lambda w\lambda t\ [{}^0Head\_of_{wt}\ {}^0Catholics]]]]$???

Additional type: $Know^*/(o\iota{*}_n)_{\tau\omega}$: hyperpropositional attitude.

Marie may know (hyperintensionally) that Pope Benedict XVI resigns but does not have to know that Pope is the Head of the Catholic Church. In hyperintensional attitudes we must fully respect the perspective of the attributee.

3.2.3. Sequent calculus and β-conversion

If we apply extensional rules of substitution of identicals and existential generalisation as specified above, Tichý's sequent calculus (or any other extensional calculus) can be applied. Yet we must be aware of the problematic nature of β-conversion. Though it is the fundamental computational rule of λ-calculi, it is underspecified by β-conversion. This rule can be executed in two different ways; 'by value' and 'by name'. There are two problems with the latter.

First, in logic of *partial functions* such as TIL the rule of transformation 'by name'

$$[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m] \vdash \mathrm{Y}(X_1 \ldots X_m / x_1 \ldots x_m)$$

is not equivalent, because the left-hand side can be *v*-improper whereas the right-hand side *v*-proper by constructing a degenerated function that is undefined for all its arguments. To illustrate it, consider two constructions C_1 and C_2 that are not equivalent, because they construct *different* functions:

C_1 $[[\lambda x\ [\lambda y\ [{}^0Divide\ y\ x]]]\ [{}^0Cot\ {}^0\pi]]$
C_2 $[\lambda y\ [{}^0Divide\ y\ [{}^0Cot\ {}^0\pi]]]$

Types: $x, y \rightarrow \tau$; $Divide/(\tau\tau\tau)$: the function of dividing y by x; $Cot/(\tau\tau)$: the cotangent function; π/τ.

The construction C_1 is the Composition of the Closure $[\lambda x\ [\lambda y\ [^0Divide\ y\ x]]]$ with the Composition $[^0Cot\ ^0\pi]$. Since the contagent function is not defined at the argument π, $[^0Cot\ ^0\pi]$ is improper by failing to construct anything. Due to compositionality principle the entire Composition C_1 is *improper*, because the function constructed by the Closure $[\lambda x\ [\lambda y\ [^0Divide\ y\ x]]]$ does not receive an argument to be applied at. However, the Closure is never improper, it always constructs a function. Hence C_2 is a proper construction. It constructs a 'degenerated function' of type $(\tau\tau)$ undefined on all its arguments. But C_2 is a β-contractum of C_1, that is the entire Composition $[^0Cot\ ^0\pi]$ has been substituted for the variable (formal parameter) x. Thus whereas C_1 does not construct anything, C_2 constructs a degenerated function that is an object (though a peculiar one).

Partiality, as we know all too well, is a complicating factor. Though lambda logic can be modified so as to allow 'undefined terms', application of a function in λ-calculi had always been total. E. Moggi (1988) would appear to have been the first to advance a definition of a partial λ-calculus, and S. Feferman (1995) introduced axioms (λ_p) for *Partial Lambda Calculus*. However, they both consider only a 'total application' to a term that is denoting.

The second problem is this. Even if we apply an equivalent 'total β-reduction', it can yield a loss of analytic information as illustrated in Section 1. This is due to the fact that we do not keep track of the function and arguments that have been used in the transformation.

An analogy from programming languages can be helpful to explain the problem. Imagine you have a procedure (program) $\lambda x\ C(x)$ with a "hole" x (unsaturated procedure with a formal parameter x). It does not make sense to compute $C(x)$ in this stage. Before calling the program $\lambda x\ C(x)$ one must 'fill in the hole' x that is to supply an argument (value) for which C should be computed. To this end there is a subprogram D that specifies the material (argument value) to be filled into the hole x.

There are two possibilities how to do it.

1. Insert into the hole x the whole subprocedure D and then compute $C(D)$. This corresponds to calling D 'by name'.
2. Compute D first in order to obtain "the material" (argument value) a. Then insert a into the hole x and compute $C(a)$. This corresponds to calling D 'by value'.

In case 1 there may be an undesirable side-effect. Imagine that the subprogram D is somehow garbled and as a result the whole procedure C gets garbled after the insertion ('damage being propagated up'). Moreover, instead of the hole *x* you have now got *D* and *D* may conflict with *C*. Again, no good, damage. This corresponds to the case of an invalid beta reduction that does not preserve equivalence. And still moreover, even if *D* does not damage *C* when computing *C(D)*, after the execution of *C(D)* you lost the track of *D* and of the result *D* produces. The two procedures have been merged together. Now you want to compute another procedure *E(x)* and to supply the same material for the hole *x*. Even if the execution of *C(D)* were successful, *D* might have been changed by the execution. There is no guarantee that the same material would be supplied to the hole *x* in *E(x)*. This case corresponds to a valid β-reduction preserving equivalence but yielding the loss of information.

Fortunately, there is a remedy. Call the subprocedure *D* 'by value'. The idea is simple. Compute *D* first to obtain its result *a* (if any), and then substitute this result for *x*. This solution is preserving equivalence, avoids the problem of the loss of analytic information, and moreover, it is in practice more effective. If the execution of the subprocedure *D* fails to produce a product, it is pointless to call *C(x)* or *E(x)* or any other procedure that should operate on this product. Thus we know it in advance, rather than only when executing *C(x)*. We keep all the procedures *C(x)*, *E(x)*, *D* separated and evaluate them only when needed. Everything is all right, as it should be.

Tichý's λ-rules involve β-reduction '*by name*'. Due to the version of sequent calculus that operates on *matches* the rule is validity preserving; *β-reduction* 'by name' in the sequent calculus is this rule:

$$\Phi \rightarrow y{:}[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m] \;||\; \Phi \rightarrow y{:}Y(X_1 \ldots X_m / x_1 \ldots x_m);$$
$$(X_i \text{ is substitutable for } x_i)$$

The left-hand match is satisfied by a valuation v if y and $[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m]$ v-construct the same object. Hence the Composition $[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m]$ is v-proper and the rule is validity preserving.

In this way the problem of partiality is avoided rather than solved. It is the standard way to deal with application as presented, for instance, by Moggi and Feferman. The rule does not give us any hint what to do in case that the Composition $[[\lambda x_1 \ldots x_m Y]\ X_1 \ldots X_m]$ is *v-im*proper, because in this case the left-hand side match is not satisfied by the valuation v due to the fact that the atomic construction y is always satisfied. Thus the rule is not applicable.

For these reasons we developed a *substitution method* that makes it possible to define a generally valid β-transformation '*by value*' that does not exhibit the above specified defects. To this end we make use of the function *Sub* defined in Section 3.2.1. Moreover we occasionally need another function $Tr_\alpha/(*_n\alpha)$ that takes an object of type α to its Trivialisation. Note that there is a substantial difference between the application of this function and the construction Trivialisation. For instance, if $x \rightarrow_v \iota$, ${}^0x$ *v*-constructs just the variable *x*. The variable is o-bound in ${}^0x$ and thus it occurs hyperintensionally. On the other hand $[Tr_\iota\ x]$ $v(John/x)$-constructs ${}^0John$. The variable *x* is free in $[Tr_\iota\ x]$ and thus occurs intensionally.

Let $x_i \rightarrow_v \alpha_i$ be mutually distinct variables and $D_i \rightarrow_v \alpha_i$ $(1 \le i \le m)$ constructions. Then the following rule of *β-reduction 'by value'* is valid:

$$[[\lambda x_1 \ldots x_m\ Y]\ D_1 \ldots D_m] \vdash {}^2[{}^0Sub\ [{}^0Tr_{\alpha 1}\ D_1]\ {}^0x_1 \ldots$$
$$[{}^0Sub\ [{}^0Tr_{\alpha m}\ D_m]\ {}^0x_m\ {}^0Y]]$$

Note the Double Execution on the right-hand side. The result of applying *Sub* is a *construction* that must be afterwards executed; hence Double Execution.

Example. "John loves his own wife. So does the Mayor of Ostrava."

$$\lambda w\lambda t\ [\lambda x\ [{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ x]]\ {}^0John] =_{\beta v}$$
$$\lambda w\lambda t\ {}^2[{}^0Sub\ {}^{00}John\ {}^0x\ {}^0[{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ x]]]$$
$$\lambda w\lambda t\ [so\_does_{wt}\ {}^0MO_{wt}] \rightarrow$$
$$\lambda w\lambda t\ {}^2[{}^0Sub\ {}^0[\lambda w\lambda t\ \lambda x\ [{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ x]]]\ {}^0so\_does\ {}^0[so\_does_{wt}$$
$${}^0MO_{wt}]] =_{\beta v} \lambda w\lambda t\ [\lambda x\ [{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ x]]\ {}^0MO_{wt}] =_{\beta v}$$
$$\lambda w\lambda t\ {}^2[{}^0Sub\ [{}^0Tr\ {}^{00}MO_{wt}]\ {}^0x\ {}^0[{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ x]]].$$

Types. $Love/(o\iota\iota)_{\tau\omega}$; $Wife\_of/(\iota\iota)_{\tau\omega}$; $John/\iota$; $MO/\iota_{\tau\omega}$: the office of the Mayor of Ostrava; $x \rightarrow_v \iota$.

One can easily check that in all these constructions, whether reduced or non-reduced, the track of the property of loving *one's own* wife is being kept. This property is constructed by the Closure $\lambda w\lambda t\ \lambda x\ [{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ x]]$. When applied to John it does not turn into the property of loving John's wife. And the same property is substituted for the variable *so_does* into the second sentence. Thus we can easily infer that John and the Mayor of Ostrava share the property of loving their own wives. If we used β-reduction 'by name' the Closure would be reduced to $\lambda w\lambda t\ [{}^0Love_{wt}\ {}^0John\ [{}^0Wife\_of_{wt}\ {}^0John]]$. No doubt that it can be β-expanded to the original Closure. The problem is that it can be also expanded to another Closure $\lambda w\lambda t\ [\lambda x\ [{}^0Love_{wt}\ x\ [{}^0Wife\_of_{wt}$

^{0}*John*]] ^{0}*John*], which means that the property of loving *John's* wife has been applied to John. In this way we lost the track of the property that has been applied to John and that we want to apply to Mayor of Ostrava. And it also shows exactly how the β-reduction by value works to our advantage.[14]

4. Conclusion

We described generalization of Tichý's sequent calculus to the calculus for TIL 2010. The generalization concerns these issues. First, the extensional rules of quantifying in and substitution of identicals were generalized so that to be valid in any context, including intensional and hyperintensional ones. Second, we showed that the sequent calculus remains to be the calculus for TIL based on the ramified hierarchy of types with one important exception, which is the rule of β-reduction. We specified a generally valid rule of β-reduction 'by value' that does not yield a loss of analytic information about which function has been applied to which argument. No doubt that these are valuable results.

Yet some open problems remain. Among them there are in particular the question on the properties of the calculus like completeness and the problem of its implementation. There is also a question whether another similarly extensional calculus of hyperintensions would not be more convenient for implementation. To this end we develop a computational variant of TIL, the functional programming language *TIL-Script*. Till now we managed to develop and test the modules for recognizing particular types of context and we implemented β-reduction by value that we use universally. Moreover, we specified and implemented the algorithm that makes it possible to exploit Prolog inference machine (see Duží et. al. 2009). However, the full-fledged TIL inference machine is still a future work.

Acknowledgements

The research reported herein was funded by Grant Agency of the Czech Republic, Projects No. 401/10/0792, "Temporal Aspects of Knowledge and Information" and also by the internal grant agency of VSB-Technical University Ostrava, Project No. SP2013/207 "Application of artificial intelligence in process-knowledge mining, modelling and management".

[14] For details see Duží – Jespersen (2013).

References

ANDERSON, C. A. (1998): Alonzo Church's contributions to philosophy and intensional logic. *The Bulletin of Symbolic Logic* 4, 129-171.

CARNAP, R. (1947): *Meaning and Necessity*. Chicago: Chicago University Press.

CHURCH, A. (1993): A revised formulation of the logic of sense and denotation. Alternative (1). *Noûs* 27, 141-157

DUŽÍ, M. (2010): The paradox of inference and the non-triviality of analytic information. *Journal of Philosophical Logic* 39, No. 5, 473-510.

DUŽÍ, M. (2012): Towards an extensional calculus of hyperintensions. *Organon F* 19, supplementary issue 1, 20-45.

DUŽÍ, M. – ČÍHALOVÁ, M. – CIPRICH, N. – MENŠÍK, M. (2009): Agents' reasoning using TIL-Script and Prolog. In: Weltzer Družovec T. - Jaakkola, H. – Kiyoki, Y. – Tokuda, T. – Yoshida, N. (eds.): *Information Modelling and Knowledge Bases XXI*. Amsterdam: IOS Press, 2010, 135-154.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. – MATERNA, P. (2010): *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic: Foundations and Applications of Transparent Intensional Logic*. Series Logic, Epistemology and the Unity of Science. Berlin, Heidelberg: Springer.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. (2012): Transparent quantification into hyperintensional contexts *de re*. *Logique & Analyse* 220, 513–554.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. (submitted): Transparent quantification into hyperpropositional contexts *de dicto*. Paper in revision.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. (2013): Procedural isomorphism, analytic information, and β-conversion by value. *Logic Journal of the IGPL* 21, 291-308. doi: 10.1093/jigpal/jzs044.

DUŽÍ, M. – MATERNA, P. (2012): *TIL jako procedurální logika. Průvodce zvídavého čtenáře Transparentní intensionální logikou*. Bratislava: aleph.

FEFERMAN, S. (1995): Definedness. *Erkenntnis* 43, 295-320.

JESPERSEN, B. (2010): Hyperintensions and procedural isomorphism: Alternative (½). In *The Analytical Way*. Proceedings of the 6th European Congress of Analytic Philosophy, ECAP VI. London: College Publications, 299-320.

MOGGI, E. (1988): *The Partial Lambda-Calculus*. PhD thesis. University of Edinburg, available as *LFCS report* at http://www.lfcs.inf.ed.ac.uk/reports/88/ECS-LFCS-88-63/.

TICHÝ, P. (1982): Foundations of partial type theory. *Reports on Mathematical Logic* 14, 52-72. Reprinted in Tichý (2004, 467-480).

TICHÝ, P. (1986): Indiscernibility of identicals. *Studia Logica* 45, 251-273. Reprinted in Tichý (2004, 649-671).

TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin, New York: De Gruyter.

TICHÝ, P. (2004): *Collected Papers in Logic and Philosophy*. V. Svoboda, B. Jespersen, C. Cheyne (eds.). Prague: Filosofia, Czech Academy of Sciences; Dunedin: University of Otago Press.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 37-53

Explikace a dedukce: od jednoduché k rozvětvené teorii typů

JIŘÍ RACLAVSKÝ

Katedra filozofie. Filozofická fakulta. Masarykova univerzita
Arna Nováka 1. 602 00 Brno. Česká republika
raclavsky@phil.muni.cz

ZASLÁN: 15-01-2013 ▪ AKCEPTOVÁN: 15-03-2013

Abstract: In the first part of the paper, I argue that explicating systems which fall under the simple theory of types are limited in explicating our conceptual scheme. Such limitation is avoided if one utilizes, instead, a ramified type theory, especially the one developed by Pavel Tichý. In the third part of the paper, I explain the role of so-called constructions and derivation systems within such a framework, elucidating how deduction demonstrates properties of objects.

Keywords: Deduction – explication – ramified theory of types – simple theory of types.

V této stati nejprve zpřesním některé pojmy související s pojmem explikace. Přezkoumáme pak, jaké možnosti mají explikační systémy, které jsou vyvedeny v jednoduché teorii typů[1] nebo pod ni nějak spadají. Ve druhé sekci narazíme na nemožnost modelovat v takovýchto explikačních systémech intenzionální[2] pojmy. Přezkoumáme pokus tuto limitu překonat prostředky jednoduché teorie typů. Nezdar je zákonitý, a proto je nezbytné jako explikační systém používat rozvětvenou teorii typů. Pléduji konkrétně pro

[1] Pod teorií typů myslím systém funkcí a non-funkcí (primitivních objektů, na jejichž souborech jsou nějaké funkce definovány), nikoli nějaký formální jazyk či teorii.

[2] „Intenzionální“ není v této stati míněno ve smyslu týkajícím se sémantiky pomocí možných světů.

teorii typů Pavla Tichého, neboť ta kombinuje prvky jak Churchovy jednoduché, tak Russellovy či spíš Churchovy rozvětvené teorie typů. Ukážeme si, že příslušné intenzionální entity, tzv. konstrukce, determinují objekty, mají k nim tedy velmi úzký vztah. Pak tzv. derivační systémy jsou systémy obsahující konstrukce a dedukční pravidla. Umožňují rigorózně dokazovat fakty o objektech, jejich vlastnostech a vzájemných vztazích. Jestliže konstrukce artikulují intuitivní rysy objektů, jež jsou explikovány běžnými extenzionálními objekty teorie typů, tak derivační systémy artikulují vlastnosti těchto objektů a jejich konstrukcí.

1. Explikace a jednoduchá teorie typů

Jak známo, *explikace* spočívá v tom, že *explikovaný – intuitivní, preteoretický – pojem* (explikandum), je převeden na *explikující – rigorózní, teoretický – pojem* (explikát, popř. explikans).[3] Jak uváděl již R. Carnap (1950), takovéto převedení má respektovat a. věcnou trefnost (materiální adekvátnost), b. formální správnost, c. plodnost (umožnit formulování obecných zákonů).[4] Níže se v úvahách omezíme na filosoficko-logickou explikaci (a nikoli třeba čistě filosofickou explikaci), za explikáty tedy budeme mít nějaké logicko-matematické entity, zejm. množiny či funkce.[5]

Převodu jednotlivých explikand na jednotlivé explikáty koresponduje *explikační funkce*, což je parciální zobrazení prvých předmětů na ty druhé. (Explikaci ve smyslu nějakého procesu se níže věnovat nebudeme, byť o ní budeme příležitostně nepřímo hovořit.)

Nyní uvažme dvojici, jejímž prvým členem je souhrn určitých vybraných pre-teoretických pojmů či entit a druhým členem je systém explikujících pojmů, *explikační systém*. Je-li k tomuto přidána patřičná explikující funkce, jedná se o *explikační rámec*. Ten je tedy určitou trojicí.[6]

---

[3] Pojem ve smyslu *notion*, nikoli *concept*; tedy entita ne nutně komplexní povahy, jakou mají pojmy, z nichž se skládají myšlenky.

[4] První dvě podmínky popisoval už Alfred Tarski ve svém slavném textu (1933/1956), kde provedl ukázkovou explikaci významu predikátu ‚pravdivý'.

[5] Při zde přijímaném funkcionálním, nikoli množinovém, pojímání fundamentů matematiky a logiky jsou množiny chápány jako charakteristické funkce (jimž se příležitostně říká ‚třídy').

[6] Pojem explikačního rámce byl inspirován Tichého poznámkami v (1986a, 258-260). V současnosti tenduji k tomu chápat explikační rámec jako trojici, jejímž prvním členem

Typicky je explikačním systémem churchovská jednoduchá teorie typů. (Poněkud provokativně tedy předpokládám, že to, v čem se pohybuje většina práce logiků, lze subsumovat pod rámec jednoduché teorie typů.) Churchovská jednoduchá teorie typů obsahuje a. typ[7] pravdivostních hodnot (obvykle dvou hodnot T a F), b. typ individuí a dále c. molekulární typy, které klasifikují všechny možné totální i parciální funkce nad objekty atomických typů ad. a. a b.[8] Předměty atomického typu jsou vlastně abstraktní objekty, jsou to entity logicky primitivní, tedy nesložené, nijak nedělitelné. Od sebe navzájem jsou numericky odlišné, mají tak rozdílnou numerickou identitu, a jsou kategoriálně odlišné od všech objektů náležících do jakéhokoli jiného typu.

Objekty atomických typů volíme k explikování entit či pojmů logicky primitivním způsobem. Pro příklad, poměrně složitý pre-teoretický objekt, jímž je určitý člověk, je explikován jakožto logicky primitivní entita, určité individuum z explikačního systému. Takto jsou vlastně ignorovány všechny rysy nepodstatné z hlediska dané explikace. Například k tomu, abychom vysvětlili fungování jazykové predikace vlastností individuím, lze vhodně od fyzikální složenosti lidí abstrahovat.

Objekty molekulárních typů typicky volíme při explikaci podmíněných fenoménů či pojmů. Onou podmíněností je obecně odvislost od něčeho, či obecněji nějaké přiřazení. Pro příklad, funkce z možných světů do pravdivostních hodnot, tedy možnosvětové propozice, byly navrženy jako významy oznamovacích vět, čímž bylo vystiženo, že jejich nabytí konkrétní pravdivostní hodnoty je odvislé od logické modality (možných světů).

Povšimneme si nyní, že explikační funkce je k individuaci explikačních rámců nezbytná. Kdybychom explikovali určitou kolekci nějakých entit jakožto některou charakteristickou funkci, je dosti podstatné, zda je v daném explikačním rámci intuitivní logická kvalita „Ano“ zobrazena explikační funkcí na T, anebo na F.[9]

---

je (celé) konceptuální schéma. Někdo by mohl namítnout, že nejasné entity z preteoretické oblasti nemohou být v oboru explikační funkce. Jenomže tu uvažujeme až v meta-rámci, v němž zkoumáme určité explikační systémy. Tato věc je podrobně vysvětlena v Raclavský (2013), kde jsou řešeny i další obtíže s pojmem explikace.

[7] Typy můžeme popisovat jako množiny objektů určitého druhu.

[8] Vlastně se jedná o Tichého (1976, srov. již 1971) rozšíření Churchovy (1940) koncepce, která byla omezena jen na totální funkce. Tichý mezi atomické typy obvykle klade ještě typ možných světů a typ reálných čísel, ale toho si zde nemusíme všímat.

[9] Tento konkrétní příklad i problém jsem převzal z Tichý (1988, 196).

Pro jiný příklad,[10] přímo fantastickou pluralitu odlišných explikačních rámců získáme, když je v explikačním systému užit typ možných světů, tj. (obvykle nekonečná) kolekce logicky primitivních entit W_1, W_2, ..., W_n. Je to proto, že těmito jsou explikovány intuitivní systémy možných faktů, kterých je mnoho a také není nijak standardizováno jejich pořadí, takže není jasné, zda teoretik při jejich explikaci použil tu či onu konkrétní explikační funkci.

Mnohost explikačních rámců je od počátku podmíněna už tím, že teoretikové pomocí (logických) individuí explikují entity rozmanitých druhů, totiž cokoli, co je „předmětem úvahy". Pokud se nyní podíváme do oblasti explikací v rámci filosofie, tak sice platí, že jakožto individua jsou explikovány konkrétní entity jako lidé apod., takže odpadá právě zmiňovaná pluralita, nicméně i tak je tu přemíra explikačních rámců. V mnohých z nich je totiž explikační funkce značně parciální – explikovány jsou pouze některé z intuitivních entit, co jsou, neboli pro ostatní intuitivní entity nevrací ony explikační funkce žádné explikáty.

Tato fragmentárnost je přirozeně důsledkem omezených lidských sil: teoretik se při explikaci soustředí jen na jeden či několik z plejády fenoménů a pojmů, které tu jsou. Někdy se ale za touto fragmentárností skrývá rezignace na *cíl, jímž je explikovat celé naše konceptuální schéma*. Občas se sice na obhajobu částečných explikací hovoří o efektivitě a ekonomii, jenže ta často vede k tomu, že explikace je vyvedena jen s minimálním úsilím a s pouze prostými metodologickými prostředky, které nicméně přece jen zajistí její přijatelnou praktickou aplikabilitu.

To, že jsou proponovány explikace jen části celého konceptuálního schématu, je někdy doprovázeno nadějí, že ony fragmentární explikační rámce půjde složit tak, aby došlo k pokrytí větší oblasti konceptuálního schématu. Při tomto je však potřeba, aby byly dané explikační rámce vzájemně seskládatelné. Je-li tomu tak, explikace toho či onoho dílčího fenoménu či pojmu je vlastně *plodná*, poněvadž umožňuje formulování obecných zákonů týkajících se našeho konceptuálního schématu. Je třeba podotknout, že metodologická či jiná provizornost mnoha explikací složitelnost s jinými explikacemi žel neumožňuje.

Snaha o co nejvíce univerzální explikaci je protichůdná zastávání metodologického postoje filosofického redukcionismu, který vědomě usiluje o vtěsnání reality do škatulky třeba prvořádové logiky. Konflikt mezi oběma

---

10 Který vychází z Tichého pozorování v (1988, 201).

směrováními byl ve 20. století manifestován osobnostmi Alonzo Churche a Willarda Ormana van Quina. Zatímco Quine jakoukoli kvantifikaci přes něco jiného než přes individua okázale odmítal, Church si plně uvědomoval nezbytnost kvantifikovat i přes jiné entity než individua (např. přes třídy tříd individuí), což je zakotveno v jeho jednoduché teorii typů. Výstižný je v této souvislosti jeho postřeh, že Quine-nominalista je v pozici analogické misogynovi, který neuznává existenci žen, ale to přece neznamená, že nemáme existenci žen normálně předpokládat.[11]

Ve prospěch *logiky prvního řádu*, tedy z hlediska jí pojednávaných objektů jen torza jednoduché teorie typů, jistě mluví její nepopiratelná úsporná elegance. Když totiž předpokládá pouze individua a pravdivostní hodnoty, tak je aplikovatelná na jakoukoli doménu intuitivních entit, jež jsou explikovatelné individui nebo nanejvýše jejich třídami/relacemi. Ona aplikabilita je však principálně fragmentární. Nejen to, důsledkem je podřezání plodnosti explikace kvůli nesložitelnosti oněch dílčích explikací.

Naopak jednoduchá teorie typů zažila a stále zažívá v explikaci celého konceptuálního schématu éru značných aspirací. V podstatné míře je to způsobeno aplikacemi při analýze přirozeného jazyka, neboť ten hovoří o nepřeberném množství entit našeho konceptuálního schématu. Explikovat entity, o nichž hovoří výrazy přirozeného jazyka, pak znamená podávat určité explikace těchto entit jakožto entit. Což je vlastně krédo klasické analytické filosofie zohledňující jazyk a provozující jeho *logickou analýzu*, tedy vlastně explikaci významů.[12]

2. Explikace a přechod od jednoduché k rozvětvené teorii typů

Kromě celkové jednoduchosti je kladem jednoduché teorie typů např. i to, že všechny entity v jejím rámci jsou množinové povahy, což je při současné preferenci množinových entit vítáno. Avšak navzdory jejím různým kladům má jednoduchá teorie typů principiální *limity*. Není totiž schopna řádně zachytit *strukturovanost*, tedy adekvátně explikovat tak komplexní entity, jakými jsou třeba jazykové významy. Přirozeně, poněvadž objekty jed-

---

[11] Viz Church (1958), ovšem zde namísto o explikaci základů matematiky realistickým nebo nominalistickým způsobem uvažuji obecněji.

[12] Vztah explikace k přirozenému jazyku a k filosofii diskutuje Carnap v (1963, zvl. 933-940, sekce 19, odpověď Strawsonovi).

noduché teorie typů jsou jen množinové objekty, což jsou objekty buď logicky primitivní anebo jsou to pouhé funkce zobrazující jedny entity na jiné.

Onu zásadní limitu si uvědomil již objevitel teorie typů,[13] Bertrand Russell. Větné významy chápal jako funkce ve starém, intenzionálním smyslu, tedy jako jisté komplexní procedury – nikoli jen pouhá zobrazení – vedoucí od argumentů k hodnotám. Tyto funkce podléhají nikoli extenzionální, ale *intenzionální individuaci*: ač jsou dvě funkce ekvivalentní tím, že dávají pro shodné argumenty tytéž hodnoty, nejsou identické, neboť se liší svou strukturou. Ke kategorizaci takových entit slouží *rozvětvená teorie typů* (Russell 1908, Whitehead – Russell 1910-1913). Například typ strukturovaných propozic je rozvětven (ramifikován) v nekonečně mnoho podtypů, tj. řádů tohoto typu.

Russell byl redukcionista a s ramifikací své dítě, jednoduchou teorii typů, doslova vylil z vaničky. S výjimkou individuí totiž exkomunikoval všechny entity jednoduché teorie typů, tj. všechny funkce v extenzionálním smyslu. Toto se vlastně stalo hlavním předmětem značné kritiky rozvětvené teorie typů, poněvadž explikace běžné matematiky bez extenzionálních funkcí byla značně krkolomná. Načež se rozvětvená teorie typů stala všeobecně nepopulární.

K jejím vzácným sympatizantům ale patřil například Church, který dokonce sám navrhl její nyní nejpoužívanější verzi.[14] Church si byl totiž dobře vědom, že k explikaci *intenzionálních pojmů* jako např. přesvědčení (‚belief') nebo vědění (‚knowledge'), jež operují na propozicích (významech vět), je ramifikace nezbytná (Church 1984, 521).

Někteří teoretici se ovšem pokusili vtěsnat svět intenzionálních entit do úzkého rámce jednoduché teorie typů. To lze ale jen za drastického zjednodušení, jehož metodologicky příkladnou variantu předložil Richmond Thomason.[15] Thomason explikoval denotáty vět pomocí funkcí z možných světů do pravdivostních hodnot, tj. možnosvětových propozic, čímž si ponechal výdobytek intenzionální (modální) sémantiky. Je ale známo, že tyto

---

13 Russell (1903, Appendix B). To, že rozlišení aspoň nějak obdobná těm z jednoduché teorie typů proponovalo více autorů, což bylo autorovi statě naznačováno anonymním recenzentem (této i jiné mé statě), popřela osoba víc jak povolaná, totiž Church (1976a, 410).

14 Church (1976). Zvláštní je, že Church se nikdy nepokusil zkombinovat jednoduchou a rozvětvenou teorii typů tak, jak to učinil Tichý (srov. níže).

15 Thomason (1980). Příklad jsem použil již v (2009, 19-20).

funkce nedokážou dostatečně jemně individuovat významy vět, protože jedna taková funkce by byla významem nekonečně mnoha ekvivalentních, avšak svými intuitivními významy navzájem odlišných vět.

Thomason se proto rozhodl tyto významy (nikoli denotáty) vět explikovat způsobem, který je pro jednoduchou teorii typů příznačný – každé větě náleží svébytný význam určitého typu, k nekonečnu vět je tak třeba přiřadit nekonečně mnoho jistých entit. Není potřeba, aby tyto entity byly funkcionálního charakteru, takže jsou to entity logicky primitivní. Pro ně zavedl Thomason nový atomický typ, nazvěme ho pro teď ‚typ větných významů', který je odlišný od typu individuí i typu pravdivostních hodnot a typu možných světů. V příslušné instanci jednoduché teorii typů pak jsou i funkce z či do typu větných významů a to např. do typu možnosvětových propozic.

Intuitivně platí, že strukturovaný význam určuje denotát, tj. pravdivostní podmínku věty, která je vhodně ztotožněna s možnosvětovou propozicí. Například pravdivostní podmínka, že Alík je pes, je jednoznačně determinována ekvivalentními procedurami, „Alík je pes", „Neplatí, že Alík není pes", atd., jež jsou vlastně významy vět.

Pro Thomasona jsou ale významy vět logicky primitivní a takové entity proto nic nedeterminují. Mohou však být zobrazeny na jiné entity. Například větný význam P_2 je zobrazen na pravdivostní podmínku-propozici, že Alík je pes. Žádná takováto funkce z větných významů do možnosvětových propozic ale nevysvětluje, proč a jakým způsobem P_2 determinuje, že Alík je pes. Aby to zjistil, Thomason má jedinou možnost: podívat se do systému explikovaných entit na to, která entita je explikována logickou entitou P_2, zda je to třeba intuitivní význam-procedura „Alík je pes" spíše než „Neplatí, že Alík není pes". Takže teoretik *musí vyskočit z rámce explikujících entit a podívat se na explikační rámec jako takový, resp. na jeho explikační funkci*.

Zcela totéž platí o Churchově explikaci pojmů.[16] Předpokládejme pro jednoduchost, že čísla jsou u Churche explikována individui, prvky atomického typu ι_0. Tzv. koncepty čísel jsou prvky právě tak atomického typu ι_1. Prvky ι_1 jsou však logicky primitivními explikacemi intuitivních entit jako „2+3", „odmocnina z 25", „5 mínus 0" atd. Samozřejmě, že tyto pojmy čísel, totiž koncepty K_1, K_2 i K_3, jsou nějak usouvztažněny. Ale pouze pomocí funkcí operujících nad objekty typu ι_0 a ι_1. Žádná z těchto funkcí, např. ta, co zobrazuje K_2 na číslo 5, nám ale sama o sobě neobjasní, proč je 5 určeno právě pojmem K_2 anebo pojmem K_3. Tyto funkce jsou jen zobrazeními

16 Např. Church (1951). Příklad diskutuji už v Raclavský – Kuchyňka (2011, 162).

domény na kodoménu, nic víc. Navíc kombinatoricky tu jsou i funkce, které např. K_2 zobrazují na jiné číslo, řekněme 7, a tak je vysvětlení opět delegováno na fakt, která z těchto funkcí je explikací kterého intuitivního pojmu.

3. Konstrukce v rozvětvené teorii typů

Pod vysvětlením v těchto případech myslím to, že např. číslo 5 je určeno intuitivním pojmem „2+3“ z toho důvodu, že tu je určitá procedura aplikující + na dvojici ⟨2,3⟩, atp. Právě takovéto vysvětlení je vlastně činěno Tichého *konstrukcemi*.[17] Explikací intuitivního pojmu „2 + 3“ je konstrukce zapisovaná pomocí ‚[**2** **+** **3**]‘, která vede k číslu 5 a to tak, že jsou zkonstruovány objekty +, 2 a 3, přičemž ta funkce + je aplikována na ⟨2,3⟩.[18]

Každá konstrukce je dána jednak tím, který objekt konstruuje, jednak tím, jak ho konstruuje. Konstrukce mohou konstruovat týž objekt a proto být ekvivalentní, ale přitom nebýt identické, když onen objekt konstruují odlišným způsobem. Konstrukce můžeme chápat jako ne nutně efektivní algoritmické výpočty (Tichý 1986, 526), tedy nikoli rovnou jako algoritmy.[19]

Konstrukce jsou mimojazykové entity, které můžeme zapisovat pomocí (typovaných) λ-termů. Jinými slovy, každému typově dobře utvořenému λ-termu koresponduje určitá konstrukce. Stojí za zmínku, že Tichý původně používal Churchovu jednoduchou teorii typů a teprve poté, co si vážně uvědomil existenci strukturovaných entit, si povšiml, že procedury bude muset od jejich jazykového vyjádření λ-termy izolovat (Tichý 2009).

Tato věc má poněkud filosofické pozadí, a proto zde musí nastoupit filosofická obhajoba pojmu konstrukce proti připomínkám ze strany zastánců jednoduché teorie typů či obdobných anebo pod jednoduchou teorii typů v zásadě spadajících rámců. Takovouto obhajobu najdeme zvláště v první kapitole Tichého knihy (1988). Alternativně lze použít i jiné prameny nejen od příznivců Tichého (Raclavský 2009, Duží *et al.* 2010), ale i z okruhu některé další literatury, v níž je tematizována strukturovanost významů. Pro

---

17 Viz k tomuto např. výstižné články Tichý (1986; 1995).

18 Srov. specifikaci konstrukcí, nejlépe v Tichý (1988, kap. 5).

19 Zcela původně Tichý (1968) pracoval s algoritmy, v té době nazývanými ‚procedury‘. (V následnictví P. Materny používám termín ‚procedura‘ v intuitivním smyslu.)

úplnost jen připomenu, že Tichý považoval jazykové významy za velmi vhodně explikovatelné jakožto konstrukce denotátů těchto výrazů.[20]

Zvláštní je, že po odhalení kategorie konstrukcí v první polovině 70. let 20. století Tichý hned neopustil prostředí jednoduché teorie typů. Konstrukce jakožto entity konstruující objekty jednoduché teorie typů do této teorie typů samy nenáležely, ale takříkajíc se nad ní vznášely. To má nepopiratelně výhodu při ontologické šetrnosti, přijímané i Tichým, která je pro filosofii a logiku 20. století symptomatická. Nicméně daň za tuto ontologickou úsporu je nasnadě: konstrukce samy nemohly být v rámci explikace explicitně traktovány.

Tuto limitu si Tichý prokazatelně uvědomil až po textu (1986), v němž podal nedobrou explikaci významu věty jako ‚Xenie počítá 2+3' či ‚Xenie počítá 3÷0'.[21] Jak později mnohem plauzibilněji vysvětluje (1988, 72), agent má podlé oné věty postoj k proceduře sečtení dvou a tří, resp. dělení tří pomocí nuly, nikoli k jejímu výsledku (který v druhém případě není žádný), a už vůbec nemá postoj k českému jazykovému výrazu. Při tomto musí být konstrukce [**2** + **3**], resp. [**3** ÷ **0**], uchopena jako taková, bez ohledu na to, co případně konstruuje, a tedy tak explicitně traktována v rámci teorii typů.

K tomuto je potřeba uznat druh bezprostřední, jednokrokové konstrukce, tzv. trivializaci. Trivializace [**2** + **3**], totiž ^{0}[**2** + **3**], konstruuje [**2** + **3**], takže ^{0}[**2** + **3**] je hledanou komponentou logické analýzy věty ‚Xenie počítá 2+3'.[22] Trivializaci ve svých dřívějších textech (už 1976) Tichý ztotožňoval s objektem samotným – každý objekt totiž byl svou vlastní bezprostřední sebe-konstrukcí. To mj. dokazuje Tichého ontologické skrupule. Všimněme si, že Tichý k ontologickému rozšíření přistoupil právě v zájmu adekvátnosti explikace, protože bez explikace pojmů „Xenie počítá 2+3" nebo „3÷0 je nedefinováno" by širší explikace našeho konceptuálního schématu nebyla možná.

Jakmile byly limity jednoduché teorie typů prolomeny a konstrukce byly uznány jako entity, k nimž např. nějaké funkce vedou, nevyhnutelně došlo k ramifikaci. Kromě bezprostředních konstrukcí konstrukcí jsou tu totiž jistě i konstrukce obsahující proměnné pro konstrukce (uvažme jejich potřebu pro analýzu vět jako ‚Existuje něco, co Xenie počítá') a jiné druhy konstrukcí, které konstruují konstrukce. Nyní vstoupilo do hry základní pravidlo vý-

---

[20] Srov. např. Tichý (1988, zvl. kap. 12) anebo řadu textů v Tichý (2004).

[21] Konkrétní Tichého příklad se týkal nedefinovanosti dělení tří nulou.

[22] Trivializaci prvořádových objektů v této stati vyznačuji tučným řezem.

stavby nejen konstrukcí – nekruhovost. Jakmile by proměnná (jakožto konstrukce, nikoli jen písmeno) byla součástí konstrukce, kterou samu tato proměnná konstruuje, by celá tato konstrukce nemohla být specifikována. To je vlastně verze *Principu bludného kruhu* (‚Vicious Circle Principle'), kterým zdůvodňoval ramifikaci typu propozic a také jednotlivých typů propozičních funkcí už Russell (1908, 1910-1913 s Whiteheadem).[23]

Tichého důmyslná teorie typů (Tichý 1988, Def. 16.1.) ve své spodní části zahrnuje jednoduchou teorii typů jakožto nástroj kategorizace tzv. prvořádových objektů. Tyto objekty jsou konstruovány konstrukcemi určitého typu řádu 1. Druhořádové objekty, tedy funkce z či do konstrukcí řádu 1, konstrukce řádu 1, a na základě tzv. kumulativity i prvořádové objekty, jsou konstruovány konstrukcemi řádu 2. Atd., výš a výše.

Typ konstrukcí je tedy ramifikován a po způsobu jednoduché teorie typů jsou kategorizovány rovněž funkce z či do konstrukcí. Tichého teorie typů je tak rozvětvená, aniž by – a to je zásadní rozdíl od všech ostatních rozvětvených teorií typů – přestala kategorizovat objekty traktované již v jednoduché teorii typů.[24] Tato typová teorie tedy zahrnuje nepřeberné množství entit[25] a je tudíž mocným nástrojem pro explikaci.

4. Explikace a rozvětvená teorie typů

Viděli jsme, že v zájmu explikace našeho konceptuálního schématu lze uznat intenzionální entity, a proto ramifikovat teorii typů, a přitom si však ponechat extenzionální entity jednoduché teorie typů. Do našeho explikačního systému jsme tedy zařadili strukturované procedury, konstrukce. Nyní je třeba se na jejich úlohu zeptat obecně.

Výše jsme při diskusi Churchových a Thomasonových explikačních postupů viděli, že síla jednoduché teorie typů je značná. Pro explikaci jakéhokoli pojmu či fenoménu je tu k dispozici nějaká funkce nebo primitivní en-

---

23 U Tichého srov. (1988, 47-48), vypracování tématiky viz v Raclavský (2009, 50-53).

24 Rozvětvenou teorií typů se vlastně jednohlasně myslí něco, co nijak nezahrnuje jednoduchou teorii typů; vzhledem k tomuto říkat Tichého teorii ‚rozvětvená' vyvolává mylný dojem.

25 Jak poznamenal už Tichý v Cmorej – Tichý (1998). Není ale všezahrnujícím rámcem, například se do něj nevejdou množiny zahrnující typově různorodé objekty. Ještě další poznámka: mezi konstrukcemi a tím, co konstruují, samozřejmě existuje nějaká funkce, která je rovněž obsažena v dané teorii typů.

tita. Nevýhodou je, že žádná z těch entit není logicky komplexní tak, jako konstrukce. Nevýhodou ale rovněž je, že jak u primitivních objektů, tak u funkcí je to, co tato entita explikuje, jasné až z pohledu na explikační funkci, která tuto entitu přiřazuje určitému intuitivnímu pojmu. Toto přiřazování bychom mohli chápat jako jakýsi téměř konceptuální zdvih, kdy se od extenzionálních objektů zdvihneme k intenzionálním objektům, které ty extenzionální objekty zadávají.

Konstrukce pak dělají přesně tu věc, že v explikačním systému zastupují konceptuální entity, které jsou de facto přítomny v oblasti intuitivních entit explikačního rámce. Díky tomu, že tyto intuitivní entity mají v explikačním systému korelát, už není třeba vystupovat z tohoto systému, abychom zjistili, co vlastně ta či ona funkce či primitivní entita explikuje.

Uvažme názorný příklad. Vyplývání lze definovat jako vztah mezi možnosvětovými propozicemi: propozice P vyplývá^P z třídy propozic P_1, ..., P_n právě tehdy, když konjunktivním složením (průnikem) propozic P_1, ..., P_n získáme propozici, která je podtřídou propozice P.[26] Takže třeba ze dvou propozic $\{W_1, W_{10}\}$ a $\{W_1, W_3, W_8\}$, kde W_i je některý možný svět a příslušné konjunktivní složení dává $\{W_1\}$, vyplývá^P propozice $\{W_1, W_2, W_5\}$. Uplatnit tento pojem propozičního vyplývání^P k objasnění vyplývání na jazykové úrovni ale není dostatečně iluminativní, protože v praktických situacích nejsme s to nijak rozhodnout, zda je propozice $\{W_1, W_{10}\}$ denotátem věty ‚Alík je pes' anebo spíše ‚Alík je kočka'. Abychom to věděli, museli bychom vědět, jaký systém faktů, tedy který intuitivní možný svět, je explikován světem W_1 či W_{10}. Na úrovni významů těch vět ale přitom velmi dobře víme, že z „Alík je pes", tedy z konstrukce λw [**Pes**$_w$ **Alík**], vyplývá „Alík je savec", tedy λw [**Savec**$_w$ **Alík**]. Nemusíme k tomu vědět, přesně které propozice jsou konstruovány kterými konstrukcemi. Stačí jen, že platí, že ty konstrukce konstruují propozice, které jsou ve vztahu vyplývání^P – poněvadž konstrukce C vyplývá^C z třídy konstrukcí C_1, ..., C_n právě tehdy, když propozice konstruovaná konstrukcí C vyplývá^P z propozic konstruovaných konstrukcemi C_1, ..., C_n.

Hned uvedu ještě další příklad. Uvažme možný svět W_1, jenž je explikací systému faktů (intuitivního možného světa), v němž je Alík psem, Micka kočkou a řada dalších takových skutečností. Logicky primitivní entita W_1 je zcela bezbarvá a o tom, co explikuje, nedává vůbec žádný náznak. Proto to,

[26] To je založeno na faktu, že propozice je charakteristická funkce možných světů, tedy vlastně nějaká třída.

co reprezentuje, může být zjištěno až inspekcí příslušné explikační funkce. V příslušném explikačním rámci je ale W_1 tím jediným možným světem, který je konstruován konstrukcí (ve slovním opisu) „ten jediný *w* takový, že Alík je ve *w* psem, že Micka je ve *w* kočkou, atd.“. W_1 je touto konstrukcí zcela barvitě popsán, konceptuálně uchopen onou konstrukcí. Uchopen, a většinou i podobně barvitě popsán, je i nekonečnem dalších, ekvivalentních konstrukcí, které všechny jsou součástí daného explikačního systému. Abychom věděli, co za svět je svět W_1, nemusíme tedy vyskakovat z onoho explikačního systému. Vrátíme-li se k příkladu churchovské explikace matematických pojmů, z pouhého nahlédnutí rigorózního konceptu-konstrukce [**2** + **3**] víme, jaký má vztah k číslu 5, tedy proč je [**2** + **3**] pojmem čísla 5.

Gottlob Frege si na více místech posteskl (např. Frege 1979, 122), že „intenzionální (obsahoví) logikové“ se sice správně věnují obsahům (intenzím) pojmů, na což „extenzionální logikové“ zapomínají, ale chybují obdobně jako oni, protože zapomínají na extenze pojmů. Přeloženo do problematiky vyplývání, kontrola platnosti úsudků se nemůže zaobírat pouze myšlenkami (‚Gedänke‘, ‚Sinne‘) vyjádřenými těmi větami, musí se starat také o významy (‚Bedeutungen‘) vět, tedy o pravdivostní hodnoty (resp. o možnosvětové propozice). A všimněme si, že v Tichého teorii typů jdou intenze a extenze ruku v ruce: věta V vyplývá (v daném jazyce) z třídy nějakých vět V_1, ..., V_n právě tehdy, když V vyjadřuje (v tom jazyce) konstrukci, která vyplývá^C z konstrukcí vyjádřených (v tom jazyce) větami V_1, ..., V_n – neboli když ta věta V denotuje (v tom jazyce) propozici, která vyplývá^P z propozic denotovaných (v tom jazyce) větami V_1, ..., V_n.[27]

5. Dedukce v rozvětvené teorii typů

Pro svou ještě nerozvětvenou teorii typů navrhl Tichý *systém přirozené dedukce* v nepublikované rozsáhlé monografii (1976). Z té evidentně čerpal zvláště v pozdější expozici svého systému v (1982), kterou doplnil v (1986a).[28] Tichého dedukční systém je objektuální, operuje na konstrukcích, nikoli na výrazech.

[27] Přejato z Raclavský (2009, 264), srov. též (2012, 247-248).

[28] V tuzemsku byl při propagaci a rozvíjení Tichého logiky jeho dedukční systém naneštěstí přehlížen, jedinou výjimkou je expozice Jana Štěpána v Materna – Štěpán (2000). Vznikl tak mylný dojem, že Tichého logika není logikou, protože nezahrnuje dedukci; s tímto názorem polemizuji ve stati Raclavský (2012).

Základními kameny dedukce nejsou samy konstrukce, ale jisté dvojice, tzv. *shody* (‚matches') X:C. Druhým členem této dvojice je libovolně složená konstrukce C. Jejím prvním členem X je buď trivializace objektu konstruovaného (při dané valuaci v) tou konstrukcí C, nebo proměnná pro objekty patřičného typu, anebo dokonce nic. V posledním případě se tak pracuje s tím, že daná konstrukce C nic ne-v-konstruuje (rozuměj v-konstruuje nic). V prvém případě jsme zase informováni, resp. je explicitně pojednáno, přesně který objekt daná konstrukce C konstruuje. V druhém případě se dovídáme a dále pak pracujeme s tím, že daná konstrukce C v-konstruuje objekt určitého typu. Pro ilustraci užitečnosti pro dedukci, druhý případ odpovídá tomu, když například u implikace víme, že její antecedent dává nějakou pravdivostní hodnotu. Prvý případ odpovídá tomu, když víme, že antecedent dává pravdivostní hodnotu F, takže můžeme odvodit, že celá implikace je pravdivá, což v předchozím případě bezprostředně nelze.

Ze shod jsou stavěny *sekventy* a z nich jsou stavěna *derivační pravidla*. Shody jsou splňovány valuacemi a sekventy jsou platné odvisle od splňování v nich obsažených sekventů, načež na platnosti sekventů závisí korektnost pravidel.

Jako obecný důvod potřeby dedukce Tichý uvádí, že to je způsob, jak studovat vlastnosti konstrukcí, které však plynou už z jejich prvotní specifikace (tj. který objekt daná konstrukce konstruuje a přesně jakým způsobem ho konstruuje):

> Stipulations #1 – #4 [specifikace jednotlivých druhů konstrukcí] constitute a complete characterization of constructions and their behaviour. Whatever can be established about constructions, especially the way they depend for what they yield on valuations and on one another, can be derived from #1 – #4. In establishing results of this sort, however, it would be inconvenient always to refer back straight to these fundamental principles. In the present chapter we shall develop a method whereby arguments concerning constructions can be broken down into a relatively small number of simple and readily checkable kinds of steps. Each of these steps will be justified once and for all in terms of #1 – #4 and then used as a prefabricated block of argumentation without further reference to those principles. Arguments composed of such blocks will be called *derivations*. They will have the advantages of conciseness and easy readability; checking the correctness of a derivation will be, in fact, a matter of mechanical routine, requiring no intuitive insight. (Tichý 1976, začátek kapitoly II. Derivations)

Na první pohled by se z této uvozující poznámky mohlo zdát, že podle Tichého se dedukce týká výlučně konstrukcí, nikoli objektů. Tento dojem je klamný už proto, že každá konstrukce je dána krom jiného tím, který objekt konstruuje a tak v důsledku se vlastnost té konstrukce přenese na jednu z vlastností toho objektu. Pro příklad, číslo 5 má vlastnost „být konstruován konstrukcí, jež spočívá v aplikaci funkce sčítání na čísla 2 a 3“ a tedy i vlastnost „být konstruován konstrukcí, jež aplikuje funkci sčítání“, kdy vlastnost „být konstrukcí, jež aplikuje funkci sčítání“ má ta konstrukce [**2** **+** **3**]. Tichý si toto nepochybně uvědomoval, když hlouběji v kapitole II. Derivations charakterizoval dedukci výstižněji jako formulování tvrzení o objektech a konstrukcích:

> Statements about objects and constructions can be often couched in terms of sequents and their validity. (Tichý 1976, sekce 15)

Mohlo by se možná zdát, že pojmosloví Tichého dedukce – splňování shod valuací, platnost sekventů, apod. – se vymyká tomu, co je obsaženo v jeho teorii typů, a že dedukce se nad entitami teorie typů jaksi vznáší. Není tomu tak. Jak jsem ukazoval již jinde (Raclavský 2012, zvl. 249), jde jen o jiný způsob, jak vyjádřit určité vlastnosti jistých konstrukcí. Říci, že shoda **5**:[**2** **+** **3**] je splňována, obnáší říci, že konstrukce [^{2}[**2** **+** **3**] **=** **5**] (kde konstrukce druhu dvojité exekuce, ^2C, v-konstruuje to, co v-konstruuje C)[29] v-konstruuje pravdivostní hodnotu T. Podobně pro platnost sekventů, které jsou vlastně tvrzeními tvaru implikace, jejímž antecedentem je množina (konjunkce) shod a konsekventem je shoda sukcedentu. Obdobně pro derivační pravidla, protože derivační pravidla jsou vlastně posloupnostmi úsudků, tedy vlastně sledy implikací.

To, jak účinně a názorně vyobrazují derivační pravidla vlastnosti objektů (i jejich konstrukcí), nyní stručně vyložím na následujících dvou příkladech.[30] V obou půjde vlastně o jakousi obdobu „sémantických postulátů“. Ty říkají, že např. ‚starý mládenec‘ je ekvivalentně nahraditelný pomocí ‚neženatý muž‘, a že ‚starý mládenec‘ implikuje ‚savec‘; to je dáno tím, jak je zadán význam sousloví ‚starý mládenec‘. Uvažme obousměrné derivační pravidlo $\models f{:}\lambda o_1 o_2[o_1 \vee o_2] \Leftrightarrow f{:}\lambda o_1 o_2[[\neg o_1] \rightarrow o_2]$, kde $\lambda o_1 o_2[o_1 \vee o_2]$ je η-redukovatelné na $\vee$, o_i je proměnná pro pravdivostní hodnoty a f pro binární pravdivostní funkce. Takovéto pravidlo mám za *definici*, vymezuje

29 Tento, šestý druh konstrukcí nemá korelát v λ-kalkulu.

30 Rozebíraném již v Raclavský (2012, 250-251).

totiž, který přesně objekt je konstruován konstrukcí $\vee$. Je to totiž týž objekt, který je konstruován konstrukcí $\lambda o_1 o_2[[\neg o_1] \rightarrow o_2]$. Derivační pravidlo $\Phi \cup \{\mathbf{T}{:}o_1\} \Rightarrow \mathbf{T}{:}o_2 \models \Phi \Rightarrow \mathbf{T}{:}\ [o_1 \rightarrow o_2]$, kde Φ je množina shod, zase ukazuje, že konstrukce tvaru implikace je pravdivá, pokud jsou pravdivé oba její členy, což ilustruje tu vlastnost implikace, že pro $\langle \mathrm{T},\mathrm{T} \rangle$ vrací T.

Dedukce zkrátka umožňuje rigorózní studium vlastností objektů a jejich konstrukcí. To má i zcela přímou souvislost s explikací, pokud přijímáme, že *explikát* intuitivního pojmu je určitý objekt Tichého teorie typů, přičemž definice jakožto derivační pravidlo tento objekt určuje prostřednictvím konstrukce druhu trivializace, která se vyskytuje v její „levé“ shodě. Například $\models f{:}\lambda o_1 o_2[o_1 \vee o_2] \Leftrightarrow f{:}\lambda o_1 o_2[[\neg o_1] \rightarrow o_2]$ předvádí explikát intuitivního „nebo“, totiž pravdivostní funkci $\vee$. Pro případ intenzionálních pojmů (např. významů výrazů) to znamená, že konstrukcí druhu trivializace je jako explikát určována nějaká konstrukce, nikoli prvořádový objekt; není tomu tedy tak, že např. před chvílí uváděná formální definice ukazuje explikát významu slova ‚nebo‘.

Veškerou oblast dedukce v Tichého rámci lze rozdělit do rozmanitě se překrývajících souborů, jimž můžeme říkat *derivační systémy*. Aniž bychom šli do detailů jejich specifikace,[31] derivační systém je dvojice, jejímž prvním členem je množina určitých konstrukcí *CS* a druhým členem množina derivačních pravidel *DR*.[32] Derivační pravidla propojují jednu podmnožinu *CS* s jinou podmnožinou *CS*. Derivační systémy jsou tak vlastně něco jako objektuální logiky či kalkuly, avšak nemusí mít vlastnosti na tyto kladené.[33]

---

31 Viz k tomuto Raclavský – Kuchyňka (2011, 171).

32 Pojem derivačního systému vznikl při úvahách nad *pojmovými systémy* Pavla Materny (např. 2004). Pojmový systém je vlastně množina konstrukcí s určitou vlastností (Materna explikuje pojmy jako jisté konstrukce). Vlastně tak jde o soubor pojmů, ale nic víc – chybí „uvažování“ s těmi pojmy. (Chybí i možnost odlišit mezi jednoduchými pojmy prvotní a odvozené pojmy – srov. třeba případ „zelený“ a „grue“ –, k čemuž je pochopitelně nějaká dedukce nezbytná. Tento problém řeší už první podoba derivačních systémů v Raclavský 2008, tam ještě nazývaných ‚pojmové‘.) Ve světle toho, že derivační pravidla lze „překlopit“ na určité konstrukce, lze říci, že derivační systémy zexplicitňují dedukční potenciál pojmových systémů tím, že činí zjevným derivační pravidla latentně obsažená v určité sadě konstrukcí. Pojem derivačního systému ale dovoluje, aby *CS* obsahoval konstrukce, které nemají korelát mezi prvky *DR*.

33 Na příkladu logik-kalkulů v rámci výrokové logiky je toto vysvětlováno zvl. na s. 252 publikace Raclavský (2012).

Hlavně to však nejsou syntaktické (či jazykové) entity, na rozdíl od axiomatických systémů či formálních teorií současné logiky, což jsou vlastně jen nějaké množiny znaků (resp. dále některé operace na nich). Tyto znaky jsou interpretovatelné jako znamenající ty či ony entity a tím jsou od oněch potenciálních sémantických přívěsků vlastně neodvislé. Derivační systémy jsou ale zcela objektuální (mohou však být jazykovými prostředky uchopeny, vyjádřeny). Pokud je tedy uznáno, že lidské uvažování a dedukce je objektuální, že jejím předmětem jsou pojmy či myšlenky, resp. jejich posloupnosti, a nikoliv, že tyto jsou jen jazykovými výrazy, tak jejich rigorózními koreláty nejsou formální teorie či dokonce kalkuly, ale právě derivační systémy.

Literatura

CARNAP, R. (1950): *Logical Foundations of Probability*. Chicago: The University of Chicago Press.

CARNAP, R. (1963): Replies and Systematic Expositions. In: Schilpp, P. A. (ed.): *The Philosophy of Rudolf Carnap (The Library of Living Philosophers)*. La Salle: Open Court, 859-1013.

CMOREJ, P. – TICHÝ, P. (1998): Komplexy. *Organon F* 5, č. 2, 139-161; č. 3, 266-289.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. – MATERNA, P. (2010): *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic: Foundations and Applications of Transparent Intensional Logic*. Springer Verlag.

FREGE, G. (1979): Comments on Sense and Meaning. In: Hermes, H. – Kambartel, F. – Kaulbach, F. (eds.): *Posthumous Writings*. Oxford: Basil Blackwell, 118-125.

CHURCH, A. (1940): A Formulation of the Simple Theory of Types. *The Journal of Symbolic Logic* 5, No. 2, 56-68.

CHURCH, A. (1951): A Formulation of the Logic of Sense and Denotation. In: Henle, P. – Kallen, H. M. – Langer, S. (eds.): *Structure, Method and Meaning (Essays in Honor of Henry M. Sheffer)*. New York: Liberal Arts Press, 3-34.

CHURCH, A. (1958): The Ontological Status of Women and Abstract Entities. http://www.jfsowa.com/ontology/church.htm.[34]

CHURCH, A. (1976): A Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski. *Journal of Symbolic Logic* 41, No. 4, 747-760.

CHURCH, A. (1976a): Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types. *Erkenntnis* 8, No. 1, 407-411.

CHURCH, A. (1984): Russell's Theory of Identity of Propositions. *Philosophia Naturalis*, No. 21, 513-522.

[34] Závěr přednášky přednesené Churchem v roce 1958. Můj český překlad lze najít na http://www.phil.muni.cz/fil/logika/tisk/church.html.

MATERNA, P. (2004): *Conceptual Systems*. Berlin: Logos.
MATERNA, P. – ŠTĚPÁN, J. (2000): *Filozofická logika: nová cesta?* Olomouc: Univerzita Palackého.
RACLAVSKÝ, J. (2008): Conceptual Dependence of Verisimilitude Vindicated. *Organon F* 15, No. 3, 369-382.
RACLAVSKÝ, J. (2009): *Jména a deskripce: logicko-sémantická zkoumání*. Olomouc: Nakladatelství Olomouc.
RACLAVSKÝ, J. (2012): Je Tichého logika logikou? (O vztahu logické analýzy a dedukce). *Filosofický časopis* 60, č. 2, 245-254.
RACLAVSKÝ, J. (2013): Explikace pojmu explikace. Rozpracovaný *ms.*[35]
RACLAVSKÝ, J. – KUCHYŇKA, P. (2011): Conceptual and Derivation Systems. *Logic and Logical Philosophy* 20, No. 1-2, 159-174.
RUSSELL, B. (1903): *Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
RUSSELL, B. (1908): Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics* 30, No. 3, 222-262.
TARSKI, A. (1933/1956): The Notion of Truth in Formalized Languages. In: *Logic, Semantics and Metamathematics*. Oxford: Oxford University Press, 152-278.
THOMASON, R. H. (1980): A Model Theory for Propositional Attitudes. *Linguistics and Philosophy* 4, No. 1, 47-70.
TICHÝ, P. (1969): Intension in Terms of Turing Machines. *Studia Logica* 24, No. 1, 7-21.
TICHÝ, P. (1971): An Approach to Intensional Analysis. *Noûs* 5, No. 3, 273-297.
TICHÝ, P. (1976): *Introduction to Intensional Logic*. Nepublikovaný *ms.*
TICHÝ, P. (1982): Foundations of Partial Type Theory. *Reports on Mathematical Logic* 14, 57-72.
TICHÝ, P. (1986): Constructions. *Philosophy of Science* 53, No. 4, 514-534.
TICHÝ, P. (1986a): Indiscernibility of Identicals. *Studia Logica* 45, No. 3, 257-273.
TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin-New York: Walter de Gruyter.
TICHÝ, P. (1995): Constructions as the Subject Matter of Mathematics. In: Depauli-Schimanovich, W. – Köhler, E. – Stadler, F. (eds.): *The Foundational Debate (Complexity and Constructivity in Mathematics and Physics)*. Dodrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 175-185.
TICHÝ, P. (2004): *Pavel Tichý's Collected Papers in Logic and Philosophy*. Svoboda, V., Jespersen, B., Cheyne, C. (eds.). Dunedin: University of Otago Publisher, Prague: Filosofia.
TICHÝ, P. (2009): Dopis Pavla Tichého Pavlu Maternovi. *Pro-Fil* 10, No. 2, 8-12, http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/3.
WHITEHEAD, A. N. – RUSSELL, B. (1910-1913): *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.

[35] Část výsledků z tohoto textu byla prezentována v přednášce ‚Explikace a logika' na workshopu *Normy a hodnoty ve vědě*, 15. 2. 2013 v Brně.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 54-65

Tichý's Two-Dimensional Conception of Inference

IVO PEZLAR

Department of Philosophy. Faculty of Arts. Masaryk University.
Arna Nováka 1. 602 00 Brno. Czech Republic
pezlar@phil.muni.cz

RECEIVED: 10-12-2012 ▪ ACCEPTED: 08-02-2013

Abstract: In this paper we revisit Pavel Tichý's novel distinction between one-dimensional and two-dimensional conception of inference, which he presented in his book *Foundations of Frege's Logic* (1988), and later in *On Inference* (1999), which was prepared from his manuscript by his co-author Jindra Tichý. We shall focus our inquiry not only on the motivation behind the introduction of this non-classical concept of inference, but also on further inspection of selected Tichý's arguments, which we see as the most compelling or simply most effective in providing support for his two-dimensional account of inference. Main attention will be given to exposing the failure of one-dimensional theory of inference in its explanation of indirect (reductio ad absurdum) proofs. Lastly, we discuss shortly the link between two-dimensional inference and deduction apparatus of Tichý's Transparent Intensional Logic.

Keywords: Deduction – Frege – Gentzen – indirect proofs – Tichý – TIL – two-dimensional inference.

1. Introduction

In his *Foundations of Frege's Logic* (1988) Pavel Tichý offered quite unusual conception of inference (deduction), which he dubbed as two-dimensional inference. Our main purpose here will be to provide further examination of this atypical notion of inference that stands in sharp contrast to "traditional" one-dimensional one. This will go hand in hand with our reexamination of selected Tichý's arguments, which we see either as the most potent or most convincing for the case of accepting the two-dimensional account of inference.

The following paper is structured into three parts: the first one is devoted to the general introduction of two-dimensional inference and its main properties. The second, and main, part will be dealing with arguments Tichý presented in order to vindicate his new-found dichotomy, as well as with the rationale behind it. In the third, and final, part will be briefly discussed the relationship between two-dimensional inference and Tichý's Transparent Intensional Logic (TIL).

2. Two-dimensional inference: a brief overview

Before we approach the two-dimensional inference itself it will be very useful to first shortly recount Tichý's general conception of inference. In Tichý (1988, 235-236) we can find three basic characteristics, which he uses to describe inference: inference is (a) advancement from some premises to what they entail, (b) a way of extending our knowledge and (c) a truth-proliferating operation. So for Tichý inference is not only an operation (or a function; see Tichý – Tichý 1999, 73) that preserves truth, but also extends our knowledge base. It is also important to note that when Tichý talks about truth proliferation, he means proliferation of *logical* truths in broad sense (valid entailments, tautologies, theorems), rather than the empirical ones.[1] Remember these features of inference well as they will come in handy later.

Now, once we have briefly familiarized ourselves with Tichý's general take on inference, we can focus our attention specifically to the two-dimensional case. As already hinted, Tichý distinguishes between the so-called "one-dimensional" and "two-dimensional" view on inference, or more precisely, on the role which hypotheses play in deduction (see Tichý 1988, 235).

Let's begin with the one-dimensional account of inference:

---

1 This might also explain why Tichý prefers the term "truth-proliferation" to the much more common "truth-preservation": in his account we really are rather expanding the inference than just keeping it valid, simply because every step is true from the very beginning, so it only makes sense to speak of proliferation instead of preservation. Of course, this distinction is merely stylistic. See also Tichý – Tichý (1999, 74).

> On one view, inference steps take hypotheses themselves as premises and yield what those hypotheses entail. This might be called the *one-dimensional* view of inference. (Tichý 1988, 235)

On the two-dimensional account, however, the inference steps do not proceed from hypotheses to conclusion, i.e., from some proposition or propositions to another one. That's because the building blocks of two-dimensional inference are not propositions.

> On the other, *two-dimensional*, view inference steps do not work on hypotheses as such but on antecedents consequent compounds, i.e., on entailments in which the hypotheses appear as antecedents. As inference step takes us then from one or more valid entailment of this sort to a further valid entailment. (Tichý 1988, 235)

So on the *one-dimensional* account the inference step takes us from certain proposition(s) to another proposition, while on the *two-dimensional* account the inference step takes us from certain valid entailment(s) to another valid entailment. In other words, for Tichý inference is an operation on valid arguments (antecedents/consequent compounds), not on their constituents, i.e., antecedents and consequents. The difference between one-dimensional and two-dimensional inference can be graphically illustrated in the following manner:

One-Dimensional Inference:

$$\frac{\text{hypothesis}}{\text{conclusion}}\ \textit{Inference Step}$$

Two-Dimensional Inference:

$$\cfrac{\cfrac{\text{antecedents}}{\text{consequent}}}{\cfrac{\text{antecedents}}{\text{consequent}}}\ \textit{Inference Step}$$

As we can see, what Tichý is actually doing is combining "hilbertian" style of proving from logical truths, i.e., axioms, with "gentzenian" style of proving from assumptions. So in the end we get a deduction method, where we start proving from logically true assumptions, i.e., antecedents/consequent compounds (valid entailments), and continue to other valid entailments, which logically follow from them.[2]

[2] It seems that what is crucial in Tichý's theory of inference is not really the two-dimensionality of inference steps, but rather their "self-sustained" nature, i.e., their

It is worth to note that Tichý's terminology is here very fluctuating: aside from antecedents/consequent compounds and valid entailments, he also speaks of conditionals, tautologies and theorems. Granted, they all can be viewed—at least from Tichý's standpoint—as referring to one and the same thing. For simplicity sake, we will prefer the first two terms, i.e., antecedents/consequent compounds and valid entailments (or arguments) and ignore the rest.

To sum it up, the two-dimensionality of inference lies in the idea that we do not infer from various hypotheses to their logical conclusion, but from valid arguments, composed of hypotheses and their conclusions (i.e., antecedents and consequents), to other valid argument. In other words, we move one dimension up, hence two-dimensional conception of inference, in which the inference "atoms" are no longer propositions, but the whole valid arguments built from them.

Finally, let's consider the following argument example:

Premise 1: It rains.
Premise 2: If it rains, the streets will be wet.
———————————————————————
Conclusion: The streets are wet.

What we learn from this and other similar valid arguments, according to Tichý, is not that "The streets are wet", but the whole (logical) fact that "From 'It rains' and 'If it rains, the streets will be wet' follows that 'The streets are wet.'", which he calls *entailment statement* (Tichý 1988, 236). In other words, we learn no empirical fact by simply carrying out the inference, but *only* that between such and such propositions holds relation of logical consequence.[3]

autonomous logical validity. This, of course, raises a couple of further questions well-fitted for further study, e.g., why should be the premises of deduction always logical truths or what are we exactly doing when we move from antecedents to consequent (it cannot be inference, since it is reserved for moves on "higher" dimension).

[3] This, however, doesn't mean that we are unable to learn any new empirical truths through the two-dimensional inference at all: although it doesn't really make sense to say "if the premises are true, then the conclusion is true", because premises are always valid entailments (tautologies), it still makes sense to say "if the empirical propositions that appear in the premises are true, then the empirical proposition that appears in the conclusion is true". Remember that on the two-dimensional account of inference, premise is the whole antecedents/consequent compound. See also Tichý – Tichý (1999, 73-75).

The new piece of information that expands our knowledge base is then not the conclusions itself, but the logical truth that such conclusion follows from such premises (i.e., the entailment statement).

Or, to use Tichý's own example, let's have the following proposition:

(1) Peter and Paul are spies.

From this, Tichý argues, we cannot infer

(2) Peter is a spy.

but only the whole entailment statement:

From "Peter and Paul are spies" follows that "Peter is a spy".

The reasoning is the following: let's assume that the inference step in question would really take us from (1) to (2). What would we learn by such a move? That Peter is really a spy? Certainly not, because (1) might be a purely hypothetical statement. Thus, one-dimensional explanation of this argument fails to meet Tichý's second requirement for inference (b), i.e., that it expands our knowledge. In other words, by inferring (2) from (1) we learn nothing at all about Peter being a spy: but what we learn, is that (2) follows from (1).

Now remember the third condition (c): inference must be truth-proliferating. It's easy to see that the one-dimensional account fails to satisfy even this requirement. For something to be truth-proliferating it must be applied to something that is true (otherwise what should it proliferate?). But in this case, we have no knowledge whatsoever whether (1) is true or not. In other words, (1) is simply a hypothetical assumption and as such it needs no concrete truth value. Thus, the move from (1) to (2) can't be inference, since it does not proliferate truth. So it seems that the only condition that the one-dimensional view of inference can fulfill is the first one (a). And one out of three, that's hardly a satisfactory result.

To summarize the first section, let us say the following: Tichý's inference proceeds not from hypotheses to conclusion, but from valid argument(s) to other valid argument. This is the core of two-dimensionality, i.e., that the corner stones of deduction are valid entailments.

In the next section we examine more closely the arguments in support of two-dimensional inference and try to shed further light on the whole motivation behind it.

3. Motivation in the background

Why Tichý strives for the vindication of this atypical, novel conception of inference? What are its main advantages? What bothered him so much about the classical one-dimensional inference (aside from the already discussed matter that it fails to satisfy two out of three of his own general requirements for inference)? These are the questions we try to answer in this section.

Tichý's reasons for introducing two-dimensional inference can be broadly categorized in two groups: (i) logical (formal, technical) ones and (ii) epistemological (philosophical) ones. The logical reasons contain, e.g., unsatisfactory (at least for Tichý) explication of indirect proofs offered by the one-dimensional account of inference. Among the epistemological reasons we can include, e.g., the impossibility of inference from false propositions (i.e., continuation in Frege's line of thought; see, e.g., Frege 1914, 244-245), problems affiliated with the introduction of assumption as cognitive attitude *sui generis* (see Tichý 1988, 254) or complications accompanying analysis of natural language arguments involving fictional characters or arbitrary objects.[4]

Given that the main subject matter of this paper is deduction, we will focus here only on the first mentioned group, more accurately, on the failure of one-dimensional account of indirect proofs, which will be the topic of our inquiry below. Although, it's important to keep in mind that this distinction serves mainly a didactic purpose and in reality both groups (i) and (ii) are, of course, very closely related and intertwined.

One last thing that needs to be said before we move forward to the examination of the just mentioned failure is that we will not be echoing Tichý's original argumentation step by step. Rather, we present here only some of his arguments. More specifically, those which we see as the most persuasive, comprehensive and easily digestible and we try to expand on them further a little.

[4] Both topics are discussed at length in *Chapter 14: The Fallacy of Subject Matter* in Tichý (1988).

3.1. Failure of one-dimensional inference

As we have already implied above, according to Tichý the one-dimensional theory of inference is incapable of precisely describing indirect (reductio ad absurdum) proofs. Let's check if it is really the case.

Suppose that we want to offer an indirect proof of the following mathematical statement:

If $x = 3$ then $2x + 4 \neq 12$

First step is to assume that its opposite holds, i.e.,

If $x = 3$ then $2x + 4 = 12$

If we proceed to solve the equation $2x + 4 = 12$, we learn that $x = 4$. Now, if we put it back to the original statement, we get that

If $x = 3$ then $x = 4$

which is, of course, a contradiction. Thus, our reductio assumption that if $x = 3$ then $2x + 4 = 12$ must be false and its negation true. Therefore, we have proved that if $x = 3$ then $2x + 4 \neq 12$. ■

But take note of the fact that from what we infer in the end that if $x = 3$ then $2x + 4 \neq 12$ is not just series of individual steps, but rather the whole preceding argument, i.e., the argument that has just resulted in contradiction. What we do in the last step of reductio proof is that we withdraw of one of the premises (the one that has led us into contradiction) and then we put its negation as a conclusion of another argument, i.e., the argument which does not have among its antecedents this particular reductio hypothesis. From this we can see that we are not really dealing here with inference between propositions alone, but rather with inference between two arguments.

Or to put it differently, reductio proof is guided by the following rule: "Put the opposite of anticipated conclusion among antecedents, and if you end up in contradiction, infer another argument, which has as its consequent the anticipated conclusion." From the wording of this instruction it is apparent that we are really moving from one argument (the failed one, i.e., the one with contradiction) to another, not just from proposition(s) to other proposition. In other words, from the failure of one argument we infer another one, in which the negation of reductio hypothesis appears as a consequent.[5] However, this type of inferring one argument from another is something which cannot be fully explained in terms of the one-dimensional view, where we just work with propositions.

Of course, the one-dimensional theory of inference can describe indirect proofs, but Tichý's point is—and I think he is quite right in this—that its description is inaccurate and doesn't really correspond with what we are actually doing while we are carrying out indirect proofs such as the one just mentioned. In this respect, the one-dimensional account of indirect proofs seems inadequate.

So what form should take the adequate rule for reductio proofs? Before we try to answer this, we will make a short detour to proofs in general.

As we have already repeated above many times, according to Tichý we don't prove things from hypotheses, but from compounds assembled from hypotheses (antecedents) and single conclusion (consequent). This also means, among other things, that during the proving process each inference step in a way recapitulates all the hypotheses of previous steps (i.e., which hypotheses are still in force, and which were abandoned).

Therefore, proof is better seen as composed of consecutive stages, i.e., gradually expanding valid arguments, each of which is fully self-contained (see Tichý – Tichý 1999, 75), rather than as just single statements. This is very noticeable in Fitch diagram proofs. Let's have a look at the following example that uses Tichý as well:

1	$[p \supset s]$	hyp
2	$[p \supset s] \supset [p \supset [p \supset r]]$	hyp
3	$[p \supset [p \supset r]]$	1, 2, mp
4	$\quad p$	hyp
5	$\quad [p \supset [p \supset r]]$	3, reiteration
6	$\quad [p \supset r]$	4, 5, mp
7	$\quad r$	4, 6, mp
8	$[p \supset r]$	4-7, implication introduction

[5] In indirect proofs we take into account the whole argument, not just its conclusion, because the conclusion alone would not be able to justify why should hold the opposite of the reductio hypothesis.

Notice that even though the last 8th line is justified only with reference to subproof on lines 4 to 7 (plus the accompanying inference rule), if we would really like to check its correctness, we would have to take into account also its "position" in the whole proof. More precisely, we would also have to look onto the line 3, to check if the line 5 is correct. Tichý writes:

> The point is that the notion of subordinate proof is not absolute but relative to the particular place that a subproof occupies in the main proof. What is a subproof as it occurs in a particular proof in a particular place, may not be a subproof as it occurs in another proof or in a different place in the same proof. (Tichý 1988, 246)

This leads Tichý to reinterpreting proofs as, rather than moving from individual propositions to another propositions, as progressing from one segment (i.e., antecedents/consequent compound) of the proof to another segment. Tichý then continues:

> Individual constituents of a proof must not be construed as single statements ("propositions" in Fitch's terminology) or subproofs, but as antecedents/consequent compounds. (Tichý 1988, 249)

This is also the reason why Tichý chooses to base his deduction apparatus on Gentzen's sequent calculus (see Gentzen 1934): it (at least according to Tichý) explicitly embodies and captures his idea of two-dimensional inference.

In contrast to Gentzen, however, Tichý sees sequents not as just two strings of "unconnected" formulae, i.e., antecedents on the left side and succedents on the right side, but (and this will hardly come as a surprise) as valid entailments, i.e., antecedents/consequent compounds. We will denote Tichý's sequents in the following way

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \,/\, \chi$$

where $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are antecedents and χ consequent.

Now, if we apply this sequent style of proofs to our earlier example in Fitch notation, we will see that the last line 8 is no longer warranted, because not all relevant hypotheses have been listed. The last step of the proof then should look more like this

$$[p \supset s], [p \supset s] \supset [p \supset [p \supset r]], p \,/\, [p \supset r]$$

i.e., it should contain all the hypotheses, which are still in force.

In other words, according to Tichý, for full and comprehensive description of a proof step it is not enough just to list the conclusion and the immediate lines, from which it was inferred, but also all the hypotheses that are still assumed. Tichý writes:

> [A] step in a proof is not completely described by simply citing the succedent formula B. The nature and legitimacy of a step depends equally on what particular hypotheses are currently in force. Besides, a step often consists in discharging a hypothesis and leaving the succedent intact. Thus in a fully perspicuous proof, where nothing is suppressed, the relevant hypotheses have to be listed at each step. (Tichý 1988, 251)

And according to him ignoring this leads to the following mistake:

> This leaves the door open for a kind of double talk. It makes it possible to imagine that in a proof formalized as a string of sequents it is the succedent of a step that is inferred from the succedents of some preceding steps, rather that the whole sequent from the preceding sequents. An illusion is thus created that the premises of an inference are often purely hypothetical statements which the maker of the inference would not dream of endorsing of subscribing to. (Tichý 1988, 253)

Now we can finally return back to our unfinished business from earlier and try to formulate basic scheme for reductio proof in scope of two-dimensional inference. The rule for indirect proof can be in simplified manner stated in the following way:

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\rho \,/\, \bot}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \,/\, \rho}\ \textit{Inference Step}$$

where $\bot$ is contradiction and $\neg\rho$ reductio hypothesis.

This brings us to the end of second part. The last topic that remains to be discussed is the relationship between two-dimensional inference and TIL.

4 Two-Dimensional Inference and TIL

At first sight it seems that two-dimensional inference is rather standalone concept, independent not only of TIL, but also hyperintesionality in general. Is it really so, or does two-dimensional inference actually offer anything TIL specific?

Here the situation gets complicated, because Tichý himself never simultaneously discussed both two-dimensional inference and the deduction system of TIL itself, which is based around the concept of *match* (see, e.g., Tichý 1982b). Of course, when discussing the match and the rest of the deduction system, Tichý also relies on generalized version of sequent calculus (after all, he calls the antecedents/succedent entity as sequent), but on the other hand, the adoption of sequent calculus doesn't necessarily mean also the acceptance of the two-dimensional inference, as was evident in Gentzen's work.

To put it differently, Tichý's deduction apparatus that appeared in his earlier works predating Tichý (1988), i.e., Tichý (1982), (1982b), (1986), can be quite easily interpreted even in terms of one-dimensional account of inference. In this respect, it would seem that the introduction of two-dimensional inference was motivated mainly by Tichý's pursue for overall philosophical rigor rather than by something strictly TIL related.

This interpretation would be also supported by the fact that Tichý repeatedly talks about two-dimensional and one-dimensional *view* on inference, not two different kinds of inference. If we take this Tichý's formulation seriously, it will become clear, that the two-dimensional and one-dimensional accounts of inference are not so much two competing concepts, but rather two distinct tools for two distinct scales. For some straightforward deductions, the one-dimensional approach might be (and actually is) sufficient, but for some other, more complex ones, it seems to fail to offer satisfactory explanation, as we have seen in a case of indirect proofs.

Simply put, adhering to one position does not necessarily compromise the other one. It is rather a question of accuracy and scrupulousness of explication of inference. In this respect, we can simply view the two-dimensional inference just as more fine-grained, more precise analysis of the "traditional" one-dimensional inference that Tichý developed in order to adequately describe reductio proofs. But as already stated, for some tasks the latter might work just fine (and sometimes even better), just as for some tasks there is no need for microscope, because magnifying glass will suffice.

References

FREGE, G. (1914): Logic in Mathematics. In: Hermes, H. – Kambartel, F. – Kaulbach, F. (eds.): *Gottlob Frege: Posthumous Writings.* Oxford: Basil Blackwell, 203-250.

GENTZEN, G. (1934/1935): Untersuchungen über das logische Schließen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, No. 2, 176-210.

ODDIE, G. – TICHÝ, P. (1982): The Logic of Ability, Freedom, and Responsibility. *Studia Logica* 41, No. 2-3, 227-248.

TICHÝ, P. (1982b): Foundations of Partial Type Theory, *Reports on Mathematical Logic* 14, 57-72.

TICHÝ, P. (1986): Indiscernibility of Identicals. *Studia Logica* 45, No. 3, 257-273.

TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin – New York: Walter de Gruyter.

TICHÝ, P. – TICHÝ, J. (1999): On Inference. In: Svoboda, V. – Jespersen, B. – Cheyne, C. (eds.): *Pavel Tichý's Collected Papers in Logic and Philosophy*. Prague: Filosofia, Czech Academy of Sciences, and Dunedin: University of Otago Press, 889-901.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 66-74

Pavel Tichý a teorie dedukce

KAREL ŠEBELA

Katedra filozofie. Filozofická fakulta. Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 12. 771 80 Olomouc. Česká republika
karel.sebela@upol.cz

ZASLÁN: 10-12-2012 ▪ AKCEPTOVÁN: 06-04-2013

Abstract: This paper focuses on the theory of deduction, developed by the Czech logician Pavel Tichý. Research on deduction in Tichý's logic is still not very advanced. Tichý's own deduction system is a generalization of Gentzen's natural deduction and although it is an interesting topic in itself, I'd rather focus on the theory or philosophy of deduction that motivates Tichý's choice of deduction system. Some of Tichý's expressions suggest that in the question of the status of the theory of deduction in logic he held the prevailing modern approach, but this contradicts the fact that most of his writings concern selected problems of logical semantics. Having introduced Tichý's original conception of deduction, I pay attention to the so called object-conception of logic, which explains the special position of the theory of deduction in his conception.

Keywords: Deduction – logic – logical consequence – logical semantics – philosophy of logic – Pavel Tichý.

1. Úvod

Jaakko Hintikka rozlišuje dvě základní funkce logiky, *deduktivní*, tj. zabývání se inferencí, a *deskriptivní*, kterou nazývá také *logickou sémantikou*.[1] S ohledem na toto dělení je nesporně pravdou, že Pavel Tichý se ve svých článcích věnoval mnohem více oblasti logické sémantiky, než tématu vyplývání (i když je samozřejmě pravdou, že uvedené dělení není zcela ostré,

[1] Převzato z Materna – Štěpán (2000, 32-33).

zvláště při aplikaci na Tichého teorii vyplývání, která rozhodně není nesémantická). To, co lze i přesto v jeho textech najít, je nesporně velice originální koncepce. Jak se pokusím dále ukázat, tato originalita souvisí především s celkovým náhledem Tichého na logiku.

Na první pohled se Tichého názor na povahu logiky nijak zvlášť neliší od většinového pojetí, které je charakteristické pro moderní logiku. Podle tohoto pojetí je logika především a na prvním místě naukou o vyplývání. U Tichého lze nalézt formulace, které s uvedeným názorem konvenují. V dialogu s Pavlem Cmorejem, na místě, kde se na chvíli zastaví a uvažuje o logice obecně, píše: „Logika je podle mého názoru teorie úsudků a jako taková je součástí epistemologie, a tedy filosofie" (Cmorej – Tichý 1998, 287). Logika je tu tedy ztotožněna s teorií úsudku; na první pohled je toto tvrzení v souladu s většinovým moderním náhledem na logiku a v nesouladu s většinovým zaměřením Tichého textů. Ale s touto koncepcí se zdá být v rozporu Tichého tvrzení, že „budeme-li vědět, o čem mluvíme, budeme zároveň vědět, co z čeho vyplývá" (citováno podle Štěpán 2002, 55).[2] Na první pohled se totiž tento výrok zdá neúnosně podceňovat roli dedukce v rámci logiky. Tento článek si klade za cíl podat interpretaci tohoto Tichého výroku v souvislosti s jeho teorií dedukce a zasadit jej do širšího rámce Tichého koncepce logiky.

2. Tichého úvahy o vyplývání

Když ve 13. kapitole své monografie začíná Tichý své úvahy o vyplývání, již první důležitý poznatek je sémantické povahy (Tichý 1988, 234). Tichý se snaží ukázat, že vyplývání není relací mezi propozicemi, ale mezi propozičními konstrukcemi. Argumentuje matematickými úsudky – propozice, že $1 + 1 = 2$, je pravdivá ve všech možných světech a časech. Totéž platí i o Pythagorově větě. Platí-li ale standardní definice vyplývání, pak z první uvedené propozice vyplývá druhá a *vice versa*, neboť ani v jednom případě se nemůže stát, že v těch světech a časech, v nichž je pravdivá premisa, bude závěr nepravdivý. Jednoduše proto, že žádný takový svět a čas, v němž by jedna z obou propozic nebyla pravdivá, neexistuje. Úsudek, podle něhož z $1 + 1 = 2$ vyplývá Pythagorova věta, je však jistě absurdní. Kromě jiného by tímto způsobem bylo možné dokázat, že libovolná matematická pravda

2 Viz již přeběhlá diskuse na toto téma in Raclavský (2012).

vyplývá z libovolné jiné, případně že z libovolné matematické pravdy vyplývají všechny ostatní.

Není-li vyplývání relací mezi propozicemi, pak dle Tichého je relací mezi propozičními konstrukcemi. Úsudek $2 = 1 + 1 \vdash 1 + 1 = 2$ je platný nikoli proto, že ve všech světech a časech, v nichž je pravdivá premisa, je pravdivý i závěr. Shody či neshody v pravdivosti zde k posouzení nestačí, je zapotřebí hledat mezi premisami a závěrem hlubší vztah. Jak píše Tichý – „Aby byla jedna matematická pravda vyvoditelná z jiné, musí obě vykazovat jistou ***strukturní* afinitu**“ (Tichý 1988, 234; tučné písmo je moje). Nyní je tedy zásadní ozřejmit povahu této „strukturní afinity“. K tomu se ale spíše než Tichého monografie samotná hodí systematizace postřehů z různých Tichého textů, kterou provedli Tichého žáci a následovníci (viz Materna – Štěpán 2000, Dodatek; Raclavský 2012, 248-251).

3. Tichého pojetí dedukce

Základním pojmem je pojem shody (match). ***Shoda*** je uspořádaná dvojice $X{:}C$, kde C je konstrukce a X je trivializace objektu určitého typu nebo proměnná pro týž typ. Dále, shoda je ***splňována*** určitou valuací v, pokud C v-konstruuje týž objekt jako X. Příklady – mějme shodu

$$\mathrm{p} : \mathrm{p} \wedge \mathrm{p},$$

kde p je proměnná typu pravdivostních hodnot. Nabývá-li p pravdivostní hodnoty Pravda, pak totéž platí i o konjunkci $\mathrm{p} \wedge \mathrm{p}$. Nabývá-li p pravdivostní hodnoty Nepravda, pak totéž platí i o konjunkci $\mathrm{p} \wedge \mathrm{p}$. Daná shoda je tedy splňována oběma (a tudíž všemi) valuacemi. To shoda

$$\mathbf{P} : \mathrm{p},$$

kde **P** označuje (objekt) pravdivostní hodnotu Pravdu, je splňována valuací, která přiřazuje pravdivostní hodnotu Pravdu proměnné p, ale není splňována valuací, která proměnné p přiřadí pravdivostní hodnotu Nepravdu.

Dále, mějme množinu Φ, která je určitou množinou shod a shodu Σ, pak můžeme utvořit ***sekvent*** $\Phi \Rightarrow \Sigma$. Sekvent je platný, pokud každá valuace, která splňuje všechny prvky Φ, splňuje i Σ (kde „Φ“ se označuje jako antecedent, „Σ“ jako sukcedent a „$\Rightarrow$“ označuje uvedený vztah mezi antecedentem a sukcedentem). Příkladem platného sekventu budiž např. sekvent

$\mathbf{P} : p \rightarrow q, \mathbf{P} : p \Rightarrow \mathbf{P} : q.$

Valuace, která splňuje všechny prvky antecedentu této sekvence, přiřazuje q pravdivostní hodnotu Pravdu. Je proto jasné, že tato valuace splňuje i sukcedent. Sekvent je tedy platný. Zavedení pojmu sekventu je motivováno tím, že Tichého dedukční systém je variantou sekvenčního kalkulu.

A konečně, ***inferenční pravidlo*** je platnost zachovávající operace na sekventech. Vzhledem k tomu, že v sekvenčním kalkulu je důkaz posloupností úsudků nezávisle na sobě platných, kdy každý krok důkazu „rekapituluje“ předchozí kroky, pak i klasická inferenční pravidla budou vypadat trochu jinak, složitěji. Tak např. modus ponens bude u Tichého mít tuto podobu:

$\Phi \Rightarrow \mathbf{P} : (p \rightarrow q), \Phi \Rightarrow \mathbf{P} : p \vdash \Phi \Rightarrow \mathbf{P} : q.$[3]

Inferenční pravidla jsou vlastně jakési zobecněné sekventy, kdy platný sekvent můžeme ztotožnit s logicky pravdivou implikací a následně ty sekventy, které budou mít stejný „tvar“ jako daný platný sekvent, budeme moci transformovat podle něj.

K Tichého pojetí dedukce ještě několik poznámek – shody jsou určitá tvrzení identity. Toto zvláštní pojetí zároveň zakládá jeho širokou uplatnitelnost, neboť tvrzení identity je jednoduše buď pravdivé, nebo nepravdivé při libovolné valuaci jeho složek. Některé valuace jeho složek nemusí „vést“ k pravdivostním, ale jiným hodnotám, případně nemusí „vracet” žádnou hodnotu. To, že valuace složek shody může vést k hodnotám jiným než pravdivostním, umožňuje to, že v Tichého systému lze usuzovat nad objekty libovolného typu (jelikož jsou shody určitými tvrzeními identity, lze tak např. v matematice tvrdit identitu nějakých čísel, dále identitu stavů věcí, individuí atd. – všechna tato tvrzení lze brát jako platné úsudky). To, že valuace složek nemusí dávat žádnou hodnotu, je nezbytné proto, že Tichý pracuje s parciálními funkcemi. A konečně to, že tvrzení identity vždy vedou k jedné z pravdivostních hodnot, je důležité proto, že úsudky lze verifikovat pouze nad pravdivostními hodnotami. (Viz Materna – Štěpán 2000, 106, 110.)

3 Příklady převzaty z Materna – Štěpán (2000, 110-122).

4. Podcenění teorie dedukce?

Po tomto nezbytném uvedení do Tichého teorie dedukce se vrátíme k úvahám o místu teorie úsudků v rámci Tichého pojetí logiky. Jak bylo na začátku řečeno, mezi logiky převládá pojetí, podle něhož je teorie dedukce jedním z nejdůležitějších, ne-li vůbec nejdůležitějším tématem logických bádání.

Tvrzení, že v Tichého logice nemá dedukce ani zdaleka tak velký význam, bychom mohli dále vyostřit výše zmíněným Tichého výrokem „budeme-li vědět, o čem mluvíme, budeme zároveň vědět, co z čeho vyplývá". Jak tomuto výroku rozumět? Na první pohled konvenuje s tím, co jsme o Tichého teorii i praxi logiky napsali výše. Nicméně jedná se o Tichým samotným nepublikovaný názor, navíc není znám přesný kontext výroku, opatrná interpretace je tedy na místě.

Prvním problémem je to, jak chápat frázi „vědět, o čem mluvíme". Nejde tu ani tak o to, znát Tichého názory na problematiku logické sémantiky, v tomto ohledu se Tichý vyjadřoval často a jasně, spíše je otázkou ono „vědět". K této otázce se za chvíli vrátíme.

Za druhé, jde o to, jak silný vlastně tento výrok je a co všechno se jím chce říct. Jedná se na pohled o implikaci, kdy to, že víme, o čem mluvíme, je postačující podmínkou pro to, abychom věděli, co z čeho vyplývá. Pokud bychom pořadí antecedentu a konsekventu obrátili, dělali bychom z Tichého inferencialistu, což myslím zcela odporuje liteře i duchu Tichého článků. Pořadí je tedy správné.

Vědět, o čem mluvíme, je tedy podmínkou pro to, abychom věděli, co z čeho vyplývá. Bylo by neproblematické, kdyby daná pasáž mluvila o tom, že se jedná o podmínku nutnou. Je věcí prvních kurzů logiky, aby se studentům vysvětlilo, že nesprávné chápání propozic, které tvoří úsudek, může způsobit zásadní pochybení při jeho hodnocení.

Předpokládám, že něco tak zřejmého ale Tichý daným výrokem nemyslel, spíše se zdá, že onu podmínku chápal, ve shodě s tím, že se jedná o implikaci, jako podmínku postačující (zároveň je to však i podmínka nutná). To už je mnohem méně samozřejmé a více kontroverzní tvrzení a nabízí se podezření, že Tichý tím velmi podceňuje úlohu teorie dedukce. Co lze proti tomuto názoru říci?

Nesoulad s většinovým pojetím logiky samozřejmě není nijak důležitý; dle mého názoru však toto Tichého pojetí vede k neintuitivním důsledkům. Vezměme si jako příklad následující: je nesporným faktem, že lidé ve své argumentační praxi čas od času chybují a berou jako platné i deduktivně neplatné úsudky. Tento fakt je koneckonců jedním z důvodů existence logiky jako oboru, který je dobré v nějaké základní míře ovládnout. Např. častou argumentační chybou je usuzování z pravdivosti implikace a konsekventu na pravdivost antecedentu dané implikace, třebas úsudek „Pokud došel benzín, pak motor nepracuje, motor nepracuje, tedy došel benzín". Otázka nyní zní, co ve světle Tichého *dicta* znamená to, že se někdo splete a bude považovat tento úsudek za platný? Ví tento člověk, o čem mluví? Zde je na místě připomenout, že dle Tichého to, „o čem mluvíme", jsou konstrukce a jimi konstruované entity, jako např. propozice, vlastnosti individuí, individuové úřady atd.

Jako první se nabízí varianta, že tento člověk neví, o čem mluví. To je samo o sobě dost kontroverzní, a Tichý by zde musel zpochybnit to, čemu se říká autorita první osoby, musel by zpochybnit, že mluvčí má privilegovaný přístup k významům svých vlastních slov. Tento princip může být sice napaden, ale povětšinou se tak děje spíše z pozic stoupenců názoru, že význam slov je něčím sociálně určovaným, což není Tichého případ.

Proti této námitce by se ale Tichý mohl bránit a říct, autor argumentu neví, „o čem mluví", protože jednoduše chybně analyzuje premisy, např. se domnívá, že hovoří o individuu, ve skutečnosti je ale řeč o individuovém úřadu. Kupříkladu právě tato záměna je Tichým a jeho následovníky často zmiňována, když např. propozice, že současný prezident USA je demokrat, je oponenty mylně chápe jako propozice o Baracku Obamovi. Ve skutečnosti říká něco o individuovém úřadu prezidenta USA, konkrétně že je obsazen demokratem. Tuto interpretaci můžeme podpořit i tak, že to, o čem podle Tichého mluvíme, tedy vesměs (hyper)intenzionální entity, jsou entity povýtce abstraktní, při jejichž poznání a „uchopování" se můžeme skutečně mýlit. Pokud bychom tedy přijali tuto variantu, pak jestliže někdo neví, co z čeho vyplývá, pak je to proto (a jenom proto!), že špatně analyzuje propozice tvořící premisy a závěr daného úsudku. Důležité je zde ono „jenom" proto – není zde připuštěna možnost, že daný mluvčí sice ví, o čem mluví, ale chyba nastane při vlastním dedukování, když např. použije neplatné úsudkové schéma nebo platné schéma špatně aplikuje. To je asi hlavní důvod kontroverznosti této Tichého myšlenky – je rozporu jednak se zaběhanou praxí výuky logiky, v níž se o chybách při dedukci běžně mluví (chybná interpretace premis a závěru je jen jednou z nich), jednak se zdá nedoceňovat mnohdy úmornou práci při dedukování. Toto údajné podcenění je ale možné zmírnit následujícím rozlišením – frázi „víme, co z čeho vyplývá" lze chápat dvojím způsobem: a) umíme z daných premis dedukovat určité závěry b) u daných premis a závěru umíme jejich analýzou zjistit, zda u nich dochází ke kýžené shodě a tedy jedná-li se o případ logického vyplývání. Možnost b) zřejmě k onomu podcenění nevede.

Druhá varianta je, že dotyčný mluvčí ví, o čem mluví, ale přesto považuje za platný úsudek, který není platný. Tato varianta by tak vyvracela Tichého tezi.

5. Teorie dedukce a Tichého pojetí logiky

Lze Tichého pozici nějak uspokojivě vysvětlit? Podle mého zde k objasnění může velmi pomoci následující citát z Tichého článku:

> Logika studuje logické objekty … a způsoby, jimiž mohou být takové objekty konstruovány z jiných takových objektů. Logik se zabývá tím, aby vysvětlil, např., jak se Bill, individuum, a chození, vlastnost propojí (combine) tak, aby to poskytlo či konstruovalo propozici, že Bill chodí, a jak se chůze propojí s některými jinými objekty tak, aby poskytlo či konstruovalo propozici, že všechno chodí. Význam zkoumání logických konstrukcí objektů je dvojí. V prvé řadě povaha takových konstrukcí často zajišťuje pozoruhodné vztahy mezi objekty, jež jsou těmito konstrukcemi generovány. Například dvě shora zmíněné konstrukce zajišťují, že propozice, kterou generuje první z nich, je slabší než (tj. vyplývá z) propozice konstruovaná druhou z nich. Na druhém místě mohou být logické konstrukce přiřazovány jazykovým výrazům jako jejich analýzy. Např. první konstrukce bude sloužit jako logická analýza věty „Bill chodí" a druhá jako logická analýza věty „Všechno chodí". Pokud jsou tyto analýzy správné, pak prve zmíněný vztah mezi konstrukcemi legitimizuje argument s premisou „Všechno chodí" a závěrem „Bill chodí". (Tichý 1978, 275, citováno podle Materna – Štěpán 2000, 30-31)

Důležitá je hned první věta – „logika studuje logické objekty" – která charakterizuje pojetí logiky podle Tichého. Nejzásadnější charakteristikou tedy není studium relace vyplývání, teorie úsudků, zkoumání argumentace, logika je studiem určitého druhu objektů (za chvíli uvidíme, že zde samozřejmě je velmi úzká provázanost, tady jde jen o to, najít onu dle Tichého prvotní funkci logiky). V první vytečkované pasáži Tichý uvádí několik příkladů takových logických objektů – individua, pravdivostní hodnoty, možné světy, propozice, třídy, vlastnosti, vztahy apod. Hlavní funkcí logiky je tedy popis určitého druhu objektů; tuto hypotézu lze podpořit i dalším citátem z jiného Tichého článku – „Logika může být chápána jako ontologie konstrukcí“ (Tichý 1986, 517, citováno ze Svoboda – Jespersen – Cheyne 2004, 604). Tento citát pochází z pozdějšího Tichého období, kdy se konstrukce jakožto specifický druh abstraktních objektů staly nejdůležitějšími entitami v Tichého pojetí logiky.

Za druhé, z této hlavní funkce logiky, tj. studia ontologie konstrukcí, Tichý odvozuje dvě další funkce logiky, které můžeme popsat jako logická analýza jazyka a teorie dedukce. Tyto funkce jsou pak jakýmisi aplikacemi primární funkce logiky. Zároveň by tato pasáž mohla nabídnout vstřícnější interpretaci výše zmíněného Tichého výroku, podle něhož znalost toho, o čem, mluvíme, je zároveň znalostí toho, co z čeho vyplývá.

Ve světle nastíněné Tichého koncepce logiky lze nyní nabídnout následující interpretaci: podle Tichého je primární funkcí logiky ontologie konstrukcí. Ve vztahu k jeho teorii dedukce je to vidět již na základním pojmu shody, která je tvrzením identity mezi určitou konstrukcí a trivializací nějakého objektu. Ve vztahu k nějakému danému úsudku to tedy znamená popsat ontologii konstrukcí, které jsou v onom úsudku zastoupeny (viz. typová analýza). Poté, co se toto podaří, je možné získané náhledy aplikovat dvojím způsobem: jednak mohou být popsané logické konstrukce objektů přiřazeny jazykovým výrazům jako jejich analýzy, zároveň mohou být zjištěny pozoruhodné vztahy mezi objekty, které jsou těmito konstrukcemi generovány (vyplývání). Povšimněme si, že obě aplikace jsou odvislé od předchozí „ontologické“ práce a zároveň jsou jedna na druhé relativně nezávislé, v tom smyslu, že není nutné vykonat nejprve jednu z nich, aby bylo možné vykonat druhou. Tichého kontroverzní tvrzení, že budeme-li vědět, o čem mluvíme, budeme zároveň vědět, co z čeho vyplývá, tak nechápu jako implikaci, ale ekvivalenci. Tato ekvivalence je ale zároveň konsekventem implikace, jejímž antecedentem je tvrzení o nutnosti studia příslušných logických objektů.

Shrnuto a podtrženo – Tichého kontroverzní výrok není výrazem podcenění teorie dedukce v rámci logiky, nicméně je výrazem specifické koncepce logiky, která se výrazně liší od převládajícího chápání logiky. Tato odlišnost byla již dříve charakterizována jako tzv. objektové pojetí logiky (Materna – Štěpán 2000, 33).[4]

4 Děkuji anonymnímu recenzentovi za velmi podnětné připomínky k původnímu rukopisu.

Literatura

CMOREJ, P. – TICHÝ, P. (1998): Komplexy (II). *Organon F* 5, 287, 266-289.

MATERNA, P. – ŠTĚPÁN, J. (2000): *Filozofická logika: nová cesta?* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého.

RACLAVSKÝ, J. (2012): Je Tichého logika logikou? *Filosofický časopis* 60, 245-254.

SVOBODA, P. – JESPERSEN, B. – CHEYNE, C. (eds.) (2004): *Pavel Tichý's Collected Papers in Logic and Philosophy.* Dunedin: University of Otago Press, Praha: Filosofia.

ŠTĚPÁN, J. (2002): *Jazyk, logika, filosofie*. Olomouc: Univerzita Palackého.

TICHÝ, P. (2004): Constructions. In: Svoboda – Jespersen – Cheyne (eds.) (2004), 599-622.

TICHÝ, P. (2004): Questions, Answers, and Logic. In: Svoboda – Jespersen – Cheyne (eds.) (2004), 293-304.

TICHÝ, P. (1998): *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin – New York: Walter de Gruyter.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 75-97

Prečo len (nutné) pravdy ako predpoklady deduktívnych úsudkov?[1]

(dvojdimenzionálny verzus jednodimenzionálny názor na inferenciu)

FRANTIŠEK GAHÉR

Katedra logiky a metodológie vied. Filozofická fakulta. Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovenská republika
frantisek.gaher@uniba.sk

LUKÁŠ BIELIK

Katedra logiky a metodológie vied. Filozofická fakulta. Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovenská republika
bieliKluc@yahoo.com

ZASLANÝ: 05-01-2012 ▪ AKCEPTOVANÝ: 10-03-2013

Abstract: The aim of the paper is to examine Tichý's understanding of the term "assumption". We show that Tichý distinguishes two approaches to inference: the one-dimensional view that treats inferences as a sequences of logical rules or axioms as well as hypotheses and their logical consequences; and the two-dimensional view specifying inference as a derivation of one entailment from (the set of) another entailment(s). It is claimed that Tichý is right in his critique of Meinong's concept of assumption as 'assertion without conviction'. Nevertheless, Tichý – in addition to his *logical concept* of assumption – uses, though unreflectively, also the *epistemic concept* of assumption. Henceforth, we claim that accepting Tichý's rejection of the epistemically hypothetical assumptions we couldn't use logic as an instrument for empirical knowledge enhancement. We believe, to the contrary, that the epistemic assumptions may become a basis for derivations and knowledge enhancement, even though they do not represent necessary truths.

1 Táto stať vznikla na Filozofickej fakulte UK v Bratislave v rámci grantu VEGA č. 1/0046/11 *Sémantické modely, ich explanačná sila a aplikácia*.

Keywords: Assumption – empirical truth – epistemical – hypotethical – inference – necessary truth.

1. Naozaj má každá inferencia začínať nutnou pravdou?

Ak si prečítame Meinongovu prácu o predpokladoch (1910, 1983), môže nás zaraziť, prečo sa jej vôbec Tichý v článku o inferencii, ktorej spoluautorkou je Jindra Tichá, venoval a dokonca v Meinongovi videl predstaviteľa prúdu, ku ktorému mali vraj blízko mnohí logici druhej polovice dvadsiateho storočia. Veď je to práca príznačná dobovým psychologizmom, ktorý Frege a jeho nasledovníci (včítane Tichého) v oblasti logiky a epistemológie zásadne odmietali. Nik z logikov, ktorých Tichý ďalej kritizuje, sa k tomuto psychologizmu nehlásil. Navyše Meinongova práca neobsahuje takmer nič z modernej logiky a mnohé pasáže sa len veľmi ťažko dajú pochopiť inak ako tak, že Meinong modernú logiku vlastne nepoznal a niekedy nerozlišoval medzi výrokovými a predikátovými premennými.[2]

Na druhej strane je pravdou to, že Tichý už vo svojej knihe (1988) spomína Meinonga v kapitole *O inferencii*, kde vysvetľuje Fregeho dvojdimenzionálnu teóriu inferencie a odmieta *predpoklad* ako kognitívny postoj *sui generis*. Urobiť hypotetický predpoklad A podľa Tichého znamená urobiť tautológiu *Ak A, tak A* – teda niečo, čomu každý bezvýhradne verí – štartovacím bodom jeho inferencie (1988, 254). Na Meinonga tu však odkazuje bez uvedenia prameňa. Zrejme neskôr ešte viac „ocenil" jeho názor na pojem predpokladu a urobil ho vlajkonosičom kritizovaného prúdu v logike, ktorý obhajoval tzv. jednodimenzionálny výklad inferencie.

---

2 Meinong ako príklad schémy hypotetického súdu uvádza „Ak A je B a B je C, tak aj A je C", ale aj „Ak je A, tak je aj B", pričom hovorí o A, B, C ako o subjektových a predikátových výrazoch. Nie je vôbec zrejmé, o aké výroky by mohlo v takom prípade ísť. Zrejme tým istým označením „preskakoval" z kategorického sylogizmu do výrokovej logiky a výrazy A, B, C zastupujú raz predikáty, inokedy výroky, pričom v druhom prípade však chýba vyjadrenie výrokovej spojky a namiesto toho tu vystupuje slovo „je" ako rezíduum vyjadrenia inklúzie („Každé A je B"). Vzápätí však jeden príklad výroku uvádza: „Ak tento trojuholník je rovnostranný, tak nie je pravouhlý" (1902, §18, 80). To je však už výrok, ktorý sa nečlení na samostatný antecedent a konzekvent. Meinong neskôr miesto pragmatického ukazovacieho zámena uvádza neurčitý člen (nejaký) a správne konštatuje, že ide o vzťah medzi *rovnostrannosťou* a *pravouhlosťou* (zabudol dodať *trojuholníkov*). Voľné prechádzanie Meinonga z kategorického sylogizmu do výrokovej logiky môžeme nájsť aj v (1910, § 29, 192-193).

Tichý zakladá rozlíšenie medzi jednodimenzionálnym a dvojdimenzionálnym pohľadom na inferenciu na tom, akú úlohu v dedukcii hrajú *hypotézy*. Podľa prvého pohľadu odvodzovací krok je postup od hypotéz ako predpokladov k tomu, čo je z týchto predpokladov odvodené (na základe logických pravidiel), resp. čo z týchto predpokladov *vyplýva*. Na odvodenie (derivation) sa pritom Tichý tak v jednodimenzionálnom ako aj v dvojdimenzionálnom pohľade pozerá nie ako na syntaktickú operáciu, ale ako na sémantickú, resp. sémanticko-syntaktickú operáciu, pracujúcu so štruktúrovanými sémantickými entitami, ktoré nazýva konštrukcie. Naproti tomu dvojdimenzionálny pohľad vymedzuje inferenciu vždy ako odvodenie určitého vyplývania z (množiny) iných vyplývaní. Odvodzovací krok teda nevychádza z hypotéz ako predpokladov, ale nanajvýš zo zložením „Ak antecedent, tak konzekvent“, resp. „Ak antecedent, tak sukcedent“, t. j. z vyplývaní, pričom antecedentmi týchto zložením môžu byť hypotézy. Inferenčný krok je potom postup od jedného alebo viacerých vyplývaní tohto druhu k ďalším vyplývaniam (1988, 254). Každý inferenčný krok musí zastupovať pravdu. Ku kľúčovému slovu *hypotéza* v tomto vymedzení sa ešte vrátime. Pozrime sa však teraz na základnú líniu Tichého kritiky Meinonga.

Tichý na úvod svojej kritiky hovorí, že ak by bol predpoklad kognitívnym postojom, potrebujeme ho aspoň objasniť, keď ho už nevieme definovať. Meinong sa podľa Tichého pokúša vysvetliť predpoklad ako tvrdenie bez presvedčenia, a preto namieta:

> Klamár však tvrdí bez toho, aby bol presvedčený, a predsa z toho, čo hovorí, nerobí predpoklad. Nepredpokladá to, pretože to neakceptuje. Mali by sme potom predpoklad vysvetliť ako „akceptáciu bez presvedčenia“? To by sa málo líšilo od toho, keby sme povedali, že predpokladať niečo znamená akceptovať to bez toho, aby sme to naozaj akceptovali. (Tichý 1988, 254)

Predpokladať (niečo) znamená podľa Tichého *niečo akceptovať*? A znamená *akceptovať niečo* to isté ako byť o tom presvedčený? Skúsme to preveriť a dodajme, že sa k Meinongovi ešte vrátime.

2. Predpoklad kvôli argumentu

Tichý v ďalšej časti svojich úvah o charaktere a funkcii predpokladov kritizuje aj iný návrh pojmu predpoklad, pričom však neuvádza jeho autora:

> Niekedy sa hovorí, že predpokladať čosi znamená začleniť to do nášho systému presvedčení, a ak je to nutné, tak aj za cenu odstránenia nejakých dosiaľ existujúcich presvedčení, aby sa – takpovediac – utvoril pre ne priestor.[3] Nie je však celkom jasné, ako to urobiť. Ak som presvedčený aj o A aj o B a chcem predpokladať, že nie (A a B), ktoré presvedčenie mám potlačiť, A alebo B? Ak aj predpokladám [**supposing**], že tento problém nejako vyriešim, naďalej zostáva otázka, aký postoj mám zaujať k tomuto revidovanému systému presvedčení. Podľa všetkého [**presumably**] nie postoj *presvedčenia* [*belief*]: pretože predpoklad [**assumption**], nech už je to čokoľvek, určite nie je sebaklam. (Tichý 1988, 254)

Aký typ postoja k propozíciám znamenajú výskyty slov „**supposing**", resp. „**presumably**" v Tichého citáte? Ide o postoj *predpokladania* k nasledujúcim dvom propozíciám?

(1) Problém revízie systému presvedčení má nejaké riešenie.
(2) Postoj k revidovanému systému presvedčení nie je postojom *presvedčenia.*

A týka sa negatívna charakteristika významu slova „**assumption**" pojmu *predpoklad?*

Pýtajme sa, či Tichý akceptoval aspoň jeden z týchto postojov, resp. či chápal tieto výrazy ako predpoklady, prípadne ako postoje predpokladania. Kvôli argumentácii určite, a to všetky, inak by nemalo zmysel sa o niečo sporiť.

Akceptoval ich v tom zmysle, že by sa stali súčasťou jeho súboru presvedčení? Zrejme nie, pretože cieľom argumentu je poprieť tézu H, ktorá tvrdí, že predpokladať niečo znamená začleniť to do nášho systému presvedčení.

Znamená to, že Tichý na jednej strane okrem pojmu predpokladu ako niečoho, čo je zjavne pravdivé a čo akceptujeme, implicitne prijíma ako predpoklad niečo, čo je zložkou prvého predpokladu a v prospech ktorého argumentujeme, na druhej strane spochybňuje oprávnenosť pojmu predpokladu, ktorý je spojený s kognitívnym postojom meniteľného presvedčenia.

[3] Označme tento Tichého návrh ako hypotézu *H*.

3. Tri pojmy predpokladu

Pozrime sa teraz bližšie na to, ktoré pojmy predpokladu sú tu v hre. Keď uvažujeme o dedukcii, môžeme za základný pojem *predpokladu* považovať pojem *logického predpokladu daného systému* (*predpoklad$_L$*), ktorý predstavuje jednu spomedzi viacerých zložiek deduktívneho úsudku (pravidla) alebo deduktívneho odvodenia alebo ktorý vystupuje ako zložka jemu zodpovedajúcej implikatívnej propozície (*propozičnej schémy*). Tento pojem predpokladu sa však nespája s nejakým stupňovateľným kognitívnym postojom a vlastne predpokladá dokonalého, vševediaceho logika. Zdá sa, akoby Tichý iný pojem predpokladu nepovažoval za potrebný.

Okrem tohto pojmu predpokladu však môžeme rozlíšiť minimálne dva ďalšie, tentoraz pojmy *epistemického predpokladu*, s ktorými už možno spojiť aj identifikáciu odlišných „nenulových" kognitívnych postojov.

Prvý z pojmov epistemického predpokladu (*predpoklad$_{E1}$*) je epistemický *predpoklad v absolútnom zmysle*, t. j. bezvýhradná akceptácia niečoho – pravé presvedčenie, ale už nedokonalého skúmateľa a logika. Myslíme si, že práve tento pojem predpokladu bol skutočným **predmetom** Tichého **argumentácie či kritiky** v citovanej pasáži.

Druhý pojem epistemického predpokladu (*predpoklad$_{E2}$*) je epistemický *predpoklad v relatívnom zmysle*: ide o akceptáciu niečoho *kvôli argumentácii*, pričom o danom predpoklade nemusíme byť presvedčení, resp. nezaväzujeme sa k jeho pravdivosti. Dokonca môžeme byť presvedčení o opaku. Tak je to vždy, keď argumentáciou niekoho presvedčujeme o chybe, nepravde: predpokladajúc túto nepravdu nie sme zaviazaní ju akceptovať s presvedčením. Ukazuje sa, že práve tento pojem predpokladu Tichý **používal** v uvedenej **argumentácii**. Oba pojmy epistemického predpokladu (na rozdiel od pojmu logického predpokladu) však majú spoločnú črtu (rekvizitu) – to, čo predpokladáme, nejako *prijímame, akceptujeme* – absolútne alebo relatívne. V diskusiách prijímame **tézu**, **predmet diskusie** väčšinou relatívne, *kvôli argumentu*, inak by sa naše presvedčenia neuveriteľne často a ľahko menili. (To by sme sa podobali niektorým politikom a ich účelovosti v prijímaní názorov bez vnútorného presvedčenia.)

Ak by Tichý trval na svojej explikácii pojmu predpoklad aj pri **používaní** pojmu predpoklad v argumentácii, tak v súlade so svojím odporúčaním by musel prijať všetky svoje *hypotetické* predpoklady (v citovanej pasáži) v tvare *Ak A, tak A*, kde „*A*" predstavuje danú hypotézu. Musel by teda napríklad konštatovať:

(1Regl) Ak problém revízie systému presvedčení má nejaké riešenie, tak problém revízie systému presvedčení má nejaké riešenie.

Tichý tak zjavne neurobil. Dôvodom najskôr mohlo byť to, že nešlo o formálne dokazovanie, o inferenciu, ale len o neformálne zdôvodňovanie, argumentáciu v širšom slova zmysle. Preverme preto aj jeho vzorový príklad presvedčovania, ktorý má demonštrovať ním preferovaný dvojdimenzionálny pohľad na inferenciu.

4. K akej zmene presvedčenia môže viesť dvojdimenzionálny pohľad na inferenciu?

V stati *O inferencii* uvádza vzorový príklad, ako niekoho môžeme o niečom presvedčiť a dôsledne rešpektovať jeho návod na prijatie hypotetického predpokladu v tvare logickej pravdy *Ak A, tak A*. Predpokladajme s Tichým, že pomyselného diskutéra – Petra – chceme presvedčiť o téze:

(R) Brent nie je dobrý ošetrovateľ,

(R) teda reprezentuje hlavnú tézu (t. j. záver) argumentácie. Tichý konštatuje, že na podporu (R) môžeme predložiť dve propozície:

(P) Brent podal niekoľkým svojim pacientom nesprávny liek.
(Q) Dobrý ošetrovateľ nikdy nepodáva nesprávny liek žiadnemu pacientovi.

Ak Peter akceptuje aj *P*, aj *Q* a je priemerne inteligentný, tak by nemalo byť ťažké doviesť ho k tomu, aby akceptoval aj R. Pretože z *P* a *Q* spolu vyplýva R. Stačí, aby si Peter uvedomil tento logický fakt. Ak si ho uvedomí, tak z dôvodu konzistentnosti, keď už niečo predtým akceptoval, má akceptovať rovnako aj R. Ak Petrovi záleží na konzistentnosti, tak bude presvedčený o R, ak ho presvedčíte o platnosti vyplývania *R* z *P* a *Q* (Tichý – Tichý 1999, 74).

Peter však nemusí hneď „vidieť" ono vyplývanie, a preto je v takomto prípade vhodné mu pomôcť a demonštrovať, že platí vyplývanie *R* z *P* a *Q*. Tichý navrhuje:

Môžete argumentovať napríklad týmito šiestimi krokmi:
(1) Pozri sa Peter, ty si presvedčený, že *P*, tak pripusťme *P*.

> (2) Si presvedčený aj o Q, takže pripusťme aj Q.
> (3) Teraz **kvôli argumentu predpokladaj,**[4] že Brent je dobrý ošetrovateľ.
> (4) Podľa P podal nejakému pacientovi nesprávny liek.
> (5) Podľa (3) a Q na druhej strane nikdy nepodal žiadnemu pacientovi nesprávny liek.
> (6) Tu máme zjavnú kontradikciu. Teda predpoklad (3), ktorý k nej vedie, nemôže byť správny; opak musí byť pravdivý. Brent nie je dobrý ošetrovateľ.
>
> Vezmime tento miniatúrny argument pod drobnohľad a pýtajme sa: Čo predstavujú jednotlivé kroky dôkazu?
>
> Na prvú otázku sa núka odpoveď, že sme dokázali propozíciu, že Brent nie je dobrý ošetrovateľ. To je však sotva správne. Dokázať niečo predstavuje spôsob stanovenia (dokázania) jeho pravdivosti. Avšak korektnosť nášho dôkazu sa dá overiť bez akéhokoľvek odkazu na empirické fakty. Takže, ak posledným krokom dôkazu bola jednoducho propozícia R, že Brent nie je dobrý ošetrovateľ, pravdivosť tejto propozície by bolo možné chápať bez akéhokoľvek **odkazu na empirické fakty**. Hoci určite existuje navôkol veľa zlých ošetrovateľov, bezpochyby nikto nie je *a priori* zlý ošetrovateľ. Teda demonštrácia nestanovila pravdivosť R. Navzdory tomu, čo sme dokázali, Brent môže byť vynikajúci ošetrovateľ. Čo sme dokázali, je skôr to, že medzi R a druhými dvomi propozíciami P, Q je určitý vzťah. Inak povedané, je to presne to, čo sme dokázali. Chceli sme Petrovi pomôcť oceniť tento **logický fakt**. (Tichý – Tichý 1999, 74)

Tichý vzápätí komentuje logickú osnovu dôkazu:

> Ako sme mu pomohli oceniť ten fakt? Viedli sme ho k tomu jednoduchými krokmi.
>
> V (1) sme mu pripomenuli zrejmý fakt, že z P a Q vyplýva P.
>
> V (2) fakt, že z P a Q vyplýva Q.
>
> V (3) fakt, že z P a Q a propozície, že *Brent je dobrý ošetrovateľ*, vyplýva, že *Brent je dobrý ošetrovateľ*.

Potom Tichý komentuje jednotlivé kroky dôkazu zmiešanou rečou optík jednodimenzionálnej a dvojdimenzionálnej inferencie:

---

4 Polotučne vyznačili autori (*Now assume, for the sake of argument, that Brent is a good nurse*).

> Teda nielen posledný krok dôkazu, ale každý z jeho predchádzajúcich krokov je vyplývaním. Každý krok toho dôkazu je tvrdením vyplývania zdôvodnený odkazom na nejaké predchádzajúce tvrdenia vyplývania.
>
> Krok (6) je zdôvodnený odkazom na kroky (5) a (4), ktoré tvrdia, že z *P*, *Q* a propozície, že *Brent je dobrý ošetrovateľ*, vyplýva, že *Brent podal nejakému pacientovi chybný liek* a že *nikdy*[5] *to tak neurobil*.
>
> Zdôvodnenie (6) sa dovoláva zákona logiky – nazývaného zavedenie negácie – ktorý hovorí, že ak z *n*+1 propozícií vyplýva A a non A, tak z prvých *n* propozícií samých vyplýva negácia poslednej propozície.[6]

Následne Tichý opravuje tento komentár a opisuje kroky dôkazu v reči výlučne dvojdimenzionálneho pohľadu na inferenciu:

> Každý z tých krokov je samostatné tvrdenie niečoho, čo je nutne pravdivé, tvrdenie, ktoré sa dá urobiť mimo kontext tohto alebo ľubovoľne iného dôkazu. Platnosť kroku (6) napríklad nezávisí od platnosti vyplývaní (4) a (5). Hovoríme, že získame krok (6) „z" krokov (4) a (5) pomocou pravidla zavedenia negácie. To však neznamená, že (6) je platný nejako vďaka (4) a (5) a môže byť vysvetlený odkazom na tieto vyplývania. (Tichý – Tichý 1999, 75)

Ak sme však dokázali logický fakt (spornosť troch tvrdení), tak sme Petra presvedčili len *o spornosti tvrdení*, nie o tom, že (R) je pravda. Je teda zrejmé, že sa nám nepodarí dokázať pravdivosť (R) bez odkazu na empirické fakty. Ani sme sa nepokúsili vykonať empirickú procedúru identifikácie pravdivosti R.

Navyše sa pýtajme, čo vlastne reprezentujú výroky „P", „Q" a „R"? Výrok „P" zrejme reprezentuje určitý empirický fakt, „Q" zase analytickú (významovú) pravdu, prípadne určitú empirickú generalizáciu, a napokon výrok „R" opäť empirický fakt so zakomponovaným (apriórnym) hodnotiacim kritériom..

Peter je presvedčený (vie), že P. Peter ako kompetentný užívateľ jazyka – je presvedčený (vie), že Q. Chceme ho presvedčiť, že v takejto situácii nemôže byť *non*R pravdivé. To však znamená, že tvrdenie o vyplývaní konštatuje spornosť triedy propozícií P, Q s propozíciou *non*R. Propozície P a R však majú v zásade rovnakú povahu – sú empirické. Dôkaz nám nepovie nič

---

5 „Nikdy" sa tu nemá chápať len časovo, ale aj ako kvantifikácia cez indivíduá, t. j. „nikomu". Pozn. autorov.

6 Bližšie o tom pozri: Tichý (1976, 383).

bližšie o stave vecí, pokiaľ nepredpokladáme pravdivosť nejakej empirickej propozície, t. j. nejaký empirický fakt. Bez toho môžeme odvodiť len spornosť nejakých propozícií, nie (empirickú) pravdivosť nejakej z nich. Jediné, k čomu môžeme Petra priviesť takýmto dôkazom, je to, že ho presvedčíme o spornosti jeho pôvodných presvedčení.

Nechceli sme ho však presvedčiť o (R) za pomoci *predpokladov* (P) a (Q)? Zdá sa, že ani týmto formálnym vzorovým dôkazom nemôžeme rozšíriť naše empirické poznanie.

Vráťme sa k Tichého neformálnej argumentácii proti hypotéze H. Chcel nás presvedčiť o tom, že hypotéza H je neakceptovateľná, pretože má neprijateľné dôsledky. Cieľom jeho argumentácie nebolo dokázať spor, ale nepravdivosť H vzhľadom na pojmovú sústavu a logické väzby medzi pojmami. Tichý explikuje hypotézu H ako analytickú nepravdu bez odvolávania sa na empirické fakty (okrem daností jazyka).

V prípade s Brentom však téza R nie je analytickou pravdou, a preto stanovenie jej pravdivosti musí odkazovať aspoň na jednu empirickú pravdu – napríklad na P. Takže bez odkazu aspoň na jednu empirickú pravdu nemôžeme zmeniť naše empirické presvedčenia, a predsa to má byť cieľom argumentácie.

5. Kritika *predpokladu arbitrárneho objektu*

V nadväznosti na svoje úvahy o úlohe predpokladov v dedukcii kritizuje Tichý aj pojem tzv. *arbitrárneho objektu* a svoju kritiku demonštruje na Kleeneho dôkaze. Spochybňuje oprávnenosť predpokladu typu „Nech určitú podmienku spĺňa nejaké ľubovoľné indivíduum“. Podľa Tichého neexistuje nijaké *nešpecifikované* indivíduum (Tichý – Tichý 1999, 83).

Tichý tu chápe výrazy „predpokladať“ a „akceptovať“ synonymne v tom zmysle, že „trieda vecí, ktoré slúžia ako predmety predpokladu, je zjavne tá istá, ako trieda vecí, ktoré slúžia ako predmety presvedčenia [belief]“ (Tichý – Tichý 1999, 83). Podľa Tichého *arbitrárny*, t. j. *ľubovoľný*, neznamená to isté čo *nešpecifikovaný*: „*Ľubovoľný* znamená to isté, čo *každý ľubovoľný*, teda frázu, ktorá nepochybne vyjadruje všeobecnú kvantifikáciu.“ V tom má Tichý pravdu.

Tichý sa ďalej snaží ústretovo rozumieť Kleeneho argumentácii a navrhuje vysvetľovať frázu „Predpokladajme o nejakom ľubovoľnom indivíduu, že nie je čierne“ argumentačným spôsobom:

Fráza signalizuje, že odvodenie začína sekventom:
(*) x nie je čierne → x nie je čierne
avšak ani antecedent, ani sukcedent nie sú propozície, takže nejde o vyplývanie.

Navrhuje však revíziu spojenia (*):

(**) Pre každé ľubovoľné x, z propozície, že x nie je čierne, vyplýva propozícia, že x nie je čierne.

Podľa tejto analýzy by sme mohli ľahko vysvetliť, prečo je vhodné hovoriť nielen „Predpokladajme o *ľubovoľnom* indivíduu, že nie je čierne", ale aj „Predpokladajme o *nešpecifikovanom* indivíduu, že nie je čierne", pretože prvé spojenie vyzdvihuje kvantifikátor, druhé jeho dosah a v tomto dosahu je voľná premenná a ako taká takpovediac reprezentuje *nešpecifikované* indivíduum.

Problémom však ostáva skutočnosť, že výraz

(***) z propozície, že *x nie je čierne*, vyplýva propozícia, že *x nie je čierne*

nehovorí nič o nešpecifikovanom indivíduu, pretože *x nie je čierne* vôbec nie je propozícia, ale to, čo Russell nazýva propozičná funkcia.

V tejto súvislosti sa Tichý (1988, 260) odvoláva na Fregeho kritiku správnej analýzy vety „Ak x je P, tak x je Q" ako zloženého súvetia. V skutočnosti ide o jednu všeobecnú propozíciu, ktorá nemá ako zložky propozície *x je P*, resp. *x je Q* (1988, 260). To sú podľa Fregeho *pseudopropozície*.[7]

To je nepochybne presvedčivá a oprávnená Tichého kritika Kleeneho postupu. Čo je však predmetom kritiky? Jednodimenzionálna teória inferencie, alebo hlavne niečo iné? Predmetom kritiky – síce v háve dvojdimenzionálnej teórie inferencie – je najmä fakt, že Kleeneho predpoklad má tvar *x je P*, pričom ide o vetnú schému, ktorá vyjadruje propozičnú funkciu, nie propozíciu. Vetná schéma sa naozaj nedá predpokladať. V tejto súvislosti je tým hlavným predmetom kritiky nie jednodimenzionálna teória inferencie, ale zamenenie propozičnej funkcie s propozíciou.

---

7 Frege charakterizuje pseudopropozíciu ako niečo, čo má gramatickú formu vety, ale nevyjadruje myšlienku, na rozdiel od reálnej propozície (Frege 1906, 377).

6. Tichého metodologické výhrady voči jednodimenzionálnemu názoru na inferenciu

Spolu s kritikou *arbitrárneho objektu* má Tichý naozaj aj výhrady voči jednodimenzionálnej teórii inferencie v systéme prirodzenej dedukcie. Jeho výhrady však majú metodologickú povahu (Tichý 1988, 258).

Jadro *prvej výhrady* spočíva v tom, že pri takýchto dôkazoch si treba **pamätať históriu celej sústavy dôkazov a aj kroky konkrétneho dôkazu**, pretože sa v niektorých krokoch dôkazu len odkazuje na predošlé dôkazy a niektoré predpoklady v riadku dôkazu nie sú uvedené, ale sa na ne odkazuje, čím jednotlivé riadky dôkazu nie sú vyplývaniami:

> Od čitateľa sa vyžaduje, aby si uchovával cestu od predpokladov, t. j. aby si pamätal na každom stupni, ktorý z predpokladov bol odstránený a ktorý bol ponechaný ako platný. To, mimochodom, je to, prečo eliminácia pomocných predpokladov pomocou pravidiel odstraňovania musí byť v takýchto dôkazoch ponechaná úplne na čitateľovej predstavivosti. (Tichý – Tichý 1999, 82)

Túto metodologickú výhradu preformuloval na imperatív:

> … v úplne zrozumiteľnom dôkaze, kde nič nie je ponechané na predstavivosť, sa musia vhodné antecedenty (v sekventovom kalkule) uviesť v každom kroku. (Tichý – Tichý 1999, 82)

Výhodou sekventového kalkulu (SekvK) je nepochybne to, že každý jednotlivý krok dôkazu je sám vyplývaním (teorémou). Je však naozaj pravdou, že dôkazy v prirodzenej dedukcii (ND) sú doslova ponechané na čitateľovu predstavivosť? V každom riadku dôkazu môžu byť vyznačené jednoznačné odkazy na príslušné dôkazy či predpoklady (riadky) dôkazu. Nejde teda o „voľnú" predstavivosť čitateľa, ale o schopnosť pamätať si predchádzajúce dôkazy a kroky aktuálneho dôkazu, podporovaná explicitnými odkazmi.

Výhodnosť prvého postupu (SekvK) voči postupu v ND je však na diskusiu. V sekventovom kalkule máme predpoklady, ktoré v prirodzenej dedukcii vystupujú v jednotlivých riadkoch derivácie, začlenené do jednoriadkového derivačného kroku (zväčša v pozícii antecedenta implikatívnej formuly či výroku). Práve takéto „zhustenie" derivácie môže byť v konečnom dôsledku menej prehľadné. Naproti tomu kroky dôkazu v systéme prirodzenej dedukcie nemusia byť teorémami, ale sú prehľadnejšie, pretože neopakujú to, čo už raz bolo dokázané. Naopak, vyzdvihujú len to nové, a tým sú úspornejšie.

Druhú výhradu voči jednodimenzionálnemu systému prirodzenej dedukcie Tichý adresuje Gentzenovi. Jej jadro spočíva v tom, že pri definíciách pravidiel ND sa zamieňa fakt dôkazu jednej formuly z druhej za tieto formuly.

Tichý namieta (Tichý – Tichý 1999, 80), že napríklad Pravidlo zavedenia implikácie v ND

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A\rightarrow B}$$

netvrdí, že z formúl A a B vyplýva (resp. je odvodené) A→B, ale že z faktu, že z A (v kombinácii s nejakými inými propozíciami) vyplýva (resp. je odvodené) B, vyplýva (je odvodené) A→B. Vzťah, ktorý toto pravidlo vyjadruje, nie je vzťahom medzi formulami, ale medzi vyplývaniami. Táto výhrada voči uvedenému pravidlu ND je oprávnená, avšak podľa nás nemieri proti meinongovskému pojmu predpokladu ako *tvrdenia bez presvedčenia*, ale identifikuje chybu typu **zámeny predmetu** skúmania (*fallacy of subject matter)* (Tichý 1988, 270).

Ostrý kontrast medzi inferenciou založenou na „bezakceptačnom" predpokladaní a inferenciou založenou na vzťahu medzi vyplývaniami nebráni podľa Tichého tomu, aby ho väčšina súčasných logikov stratila zo zreteľa. Na ilustráciu si vyberá učebnicu Graema Forbesa (1994, 86), ktorú komentuje slovami: „... meinongovskou rečou uvádza študenta do systému, ktorý formalizuje Fregeho pojem inferencie" (Tichý – Tichý 1999, 79).

Podľa Tichého (1988, 236), ak z hypotetického predpokladu

(2) Peter a Pavol sú špióni

odvodíme to, že

(1) Peter je špión

nedozvieme sa, že (1) je pravda. To, čo sa dozvieme, je to, že (1) je pravda *relatívne* vo vzťahu k hypotetickému predpokladu (2). Podľa Tichého sa teda v skutočnosti dozvieme to, že z (2) vyplýva (1):

> Toto tvrdenie je však kategoricky pravdivé. Ide o prípad nepodmienečne platného logického princípu – z konjunkcie vyplývajú oba konjunkty.

> Tvrdenie sme nezískali „z“ (2) a jeho pravdivosť nie je relatívna, alebo závislá od (2). Myslieť si to znamená dopustiť sa sotva zreteľnej chyby, ktorú môžeme nazývať *chyba predpokladu*. (Tichý 1988, 236)

Tento poznatok analytickej pravdy o vyplývaní konjunktu z konjunkcie však nemôže nijako rozšíriť naše empirické poznanie – je logickým faktom (t. j. množina teorém je uzavretá vzhľadom na reláciu logického dôsledku). Ak má byť logika nástrojom na rozširovanie empirického poznania, tak by nás predsa mali zaujímať aj tie „relatívne“ pravdy, ktorých evidencia pravdivosti je garantovaná vzhľadom na evidenciu o pravdivosti iných empirických tvrdení. Paradoxným sa môže zdať, že na stanovenie evidencie pravdivosti konjunkcie musíme mať najprv evidenciu pravdivosti oboch konjunktov a deduktívne usudzovanie nám to len znovu „pripomenie“ a vlastne (zdanlivo) neprinesie žiadnu novú (empirickú) informáciu. Akoby sa na scénu hlásil paradox dedukcie.

7. Tichého príklad úsudku s empirickou premisou

Jednoduchosť analyzovaného príkladu inferencie (2) $\models$ (1) však, zdá sa, zastiera niektoré dôležité súvislosti do úzadia. (Tichý bol pritom jeden z prvých, ktorý paradox dedukcie presvedčivo a systémovo vysvetlil.[8]) Preverme preto ešte raz Tichého pohľad na inferenciu na príklade s ošetrovateľom Brentom, ktorý sme už vyššie uviedli. Majme úsudok:

(Q) Dobrý ošetrovateľ nikdy nepodáva nesprávny liek žiadnemu pacientovi.
(P) Brent podal niekoľkým svojim pacientom nesprávny liek.

(R) Brent nie je dobrý ošetrovateľ.

Všeobecný predpoklad (Q) uveďme v reglementovanom tvare (Q*):

(Q*) Žiadny dobrý ošetrovateľ nikdy nepodáva nesprávny liek žiadnemu pacientovi.[9]

---

[8] Tichý (1988, 4); na báze jeho systému logiky (TIL) to pre všetky typy analytických právd urobila Duží (2010).

[9] Protivníci logiky ako nástroja na rozširovanie poznania by mohli tvrdiť, že evidenciu o pravdivosti všeobecného predpokladu (Q*) nemôžeme mať, pokiaľ nemáme evidenciu

Tichý by mal akceptovať, že z empirického zistenia (P) a všeobecného princípu (Q) vyplýva (je z nich odvoditeľné) nové empirické zistenie (R), ktoré už nie zjavne (t. j. nie explicitne) je obsiahnuté v premisách na rozdiel od príkladu s konjunkciou *Peter a Pavel sú špióni*.[10] Takže z empirickej premisy spolu s vhodnými princípmi (všeobecnými zákonmi, konvenčnými pravdami a pod.) môžeme logicky odvodiť novú, zaujímavú empirickú pravdu. Jej pravdivosť je však vždy *relativizovaná k pravdivosti premís*, pokiaľ ju neverifikujeme priamo, čo sa však niekedy ani nedá. Priame testovanie toho, že Brent je zlý ošetrovateľ, je problematické. (Už pre stoikov boli najcennejšími tie úsudky, v ktorých sa z epistemicky zjavného usudzovalo na epistemicky skryté. Napríklad z faktu, že *Pot presiaka jeho pokožkou* a princípu *Ak niečo presiaka niečím iným, tak to iné má póry*, usudzovali na existenciu pórov v pokožke.) To, že Brent niekedy niekomu podal nesprávny liek, je však samostatne empiricky zistiteľné, ale to, že Brent je zlý ošetrovateľ, sme logicky odvodili.[11]

---

o pravdivosti všetkých jednotlivých prípadov a zo všeobecného princípu nemôžeme odvodiť nové jednotlivé prípady, ale len to, čo princíp sám predpokladá ako známe. Táto výhrada je založená na platnosti predpokladu, že len induktivistická cesta vedie k poznaniu všeobecného (a teda presne vzaté, úplná evidencia všeobecného princípu nie je možná). História vedy veľakrát demonštrovala, že ciest k poznaniu všeobecného je viac a idealizácia a abstrakcia sú oveľa silnejšie vedecké metódy ako empirická generalizácia (ktorá aj tak vždy už predpokladá nejakú protohypotézu). Platnosť gravitačného zákona aj pre netestované telesá v budúcom čase je príkladom *pars pro toto*. Predpokladáme, že s tým by Tichý v zásade súhlasil, a preto tu nemusíme viac zdôvodňovať oprávnenosť všeobecnej premisy Q.

10 Samozrejme, ani predpoklad v tvare konjunkcie nás neoprávňuje tvrdiť, že niektorý jej konjunkt je v nej obsiahnutý tak, že jeho odvodenie neprináša novú (analytickú) informáciu, hoci empirická informatívnosť záveru je menšia ako predpokladu (záver vylučuje menej možných svetov ako s ním nezlučiteľných oproti predpokladu). Bližšie o tom pozri Duží (2010).

11 Niekto by mohol namietať, že zistenie, že Brent podal nejakému pacientovi nesprávny liek, je vlastne zhodné s empirickým zistením, že je zlý ošetrovateľ. Aj keby bol pojem „zlý ošetrovateľ“ definovaný pomocou pojmu „podať niekedy niekomu nesprávny liek“, neboli by to podľa Tichého pojmy totožné, a preto záver prináša novú informáciu.

8. *Hypotetický* ako významovo neurčený verzus *hypotetický* ako epistemicky neurčený

Čo vlastne viedlo Tichého k teórii dvojdimenzionálnej inferencie? Niektoré dôvody sme už uviedli a uprednostňovanie dvojdimenzionálneho výkladu odvodzovania voči jednodimenzionálnemu sme demonštrovali ako metodologickú, nie logickú záležitosť. Tichý však uvádza špeciálnu motiváciu pre svoju teóriu dvojdimenzionálnej inferencie – ako veľakrát predtým v iných otázkach – je jeho inšpiráciou práve Frege a najmä jeho stať *Základy geometrie II.* (1906). Podľa Tichého bol Frege presvedčený, že usudzujeme z (množiny) vyplývaní na vyplývanie a podľa neho bol Frege prvým, kto na spomínanú *chybu predpokladu* upozornil (1998, 236). Je naozaj Fregeho odmietnutie usudzovania z hypotetického predpokladu jasný príklon k dvojdimenzionálnemu pohľadu na odvodzovanie? Skúsme to preveriť a podložiť textovou evidenciou.

Tichý cituje tri rôzne Fregeho príklady. *Prvý príklad* (Frege 1906, 425) má všeobecnú povahu a opisuje, ako by mal vyzerať dôkaz nezávislosti nejakej propozície od súboru axióm. Ťažiskom tejto pasáže je vlastne kritika Hilbertovho postupu, v ktorom vystupuje veta, resp. formula ako čisto formálna, jazyková entita bez priradeného významu, ktorá môže byť v závislosti od interpretácie raz pravdivá a inokedy (pri inej interpretácii) nepravdivá. Frege v tejto súvislosti odmieta odvodzovanie z takýchto pseudovýrokov (pseudopropozícií) a s ním späté Hilbertovo formalistické chápanie axióm,[12] ktoré môžu meniť pravdivostnú hodnotu. Pre Fregeho sú axiómy obsažné (majú zmysel) a pravdivé, a preto nemôžu mať povahu *hypotetických* (a neinterpretovaných) *predpokladov* à la Hilbert. Neučenosť pravdivostnej ho dnoty takéhoto predpokladu však nie je spôsobená tým, že je pre nás epistemicky nedostupná, hoci ju predpoklad objektívne má,[13] ale tým, že predpoklad vôbec nemá priradený zmysel, resp. význam (je vo Fregeho terminológii vlastne *pseudopredpokladom*), a až v závislosti od toho, aký zmysel mu

[12] Frege ironicky prirovnáva Hilbertovo usudzovanie z formálnych (zmyslovo vnímateľných) viet ako postupností znakov k úsiliu obrobiť záhradku mentálnou aritmetikou (Frege 1906, 424).

[13] Pre Fregeho neprichádzala do úvahy neurčenosť v tom zmysle, že by propozícia bola funkciou na svetamihoch, ako vysvetľuje intenzionálna logika empirické propozície, pretože jeho úplná myšlienka obsahovala ako svoju súčasť aj časový parameter, a preto pre ňu platilo, že je (nemenne) pravdivá alebo nepravdivá – „Ale táto myšlienka, ak je pravdivá, tak je pravdivá nielen dnes či zajtra, ale bezčasovo“ (Frege 1992, 52).

priradíme, bude pravdivý alebo nepravdivý. Frege teda odmieta *hypotetickosť axióm* ako *významovú neurčenosť* formálnych viet. (Tento pojem hypotetickosti môžeme nazvať aj *sémantická hypotetickosť.*) Hypotetickosť ako epistemická neurčenosť, nedostupnosť pravdivostnej hodnoty predpokladu, tu nie je v hre. Musíme teda zodpovedať otázku, ktorý z týchto dvoch pojmov *hypotetickosti* použil Tichý vo vymedzení rozdielu medzi jednodimenzionálnym a dvojdimenzionálnym pohľadom na inferenciu.

Stojíme pred dilemou (D):

A) Ak Tichý pracoval s prvým pojmom hypotetickosti ako významovej neurčenosti, tak všetky jeho uvádzané protipríklady voči jednodimenzionálnej teórii odvodzovania sú chybné – ťažiskom sú tam empirické predpoklady, z ktorých všetky sú významovo určené, hoci nie sú analyticky pravdivé.
B) Ak Tichý pracoval s druhým pojmom hypotetickosti ako nie priamej kognitívnej dostupnosti, tak citovaná pasáž z Fregeho nemôže nijako podporiť jeho názor na inferenciu.

Druhý citovaný *príklad* je v istom zmysle konkrétnejší a vo Fregeho texte sa vyskytuje pred príkladom, ktorý Tichý zmieňuje ako prvý.[14] Frege ho uvádza diskusiou o tom, čo je to odvodenie. Zdôrazňuje, že odvodenie nie je zložené zo znakov, hoci môže vyzerať ako postup od jednej skupiny znakov k novej skupine znakov: „Každá z premís je určitá propozícia poznaná ako pravdivá; a v závere je tiež určitá propozícia poznaná ako pravdivá“ (1906, 387). Ďalej analyzuje význam spojenia *formálne odvodenie.* Frege konštatuje:

> Môžeme povedať, že v istom zmysle je každé odvodenie formálne, pretože sa deje podľa nejakého všeobecného zákona odvodenia. V inom zmysle žiadne odvodenie nie je formálne, pretože aj premisy, aj závery majú svoje myšlienkové obsahy, ktoré sa vyskytujú v tomto konkrétnom spôsobe spojenia len v tom odvodení. (Frege 1906, 387)

V súlade s tým nemôžeme sériu formálnych odvodení považovať za vlastné odvodenie, ale len za jeho schému. Takáto schéma nám môže slúžiť na to, že v danom prípade nemusíme prejsť celý reťazec odvodenia, jeho jednotlivé kroky, ale môžeme z prvých premís prejsť priamo k záveru. To však už bude všeobecná teoréma. Potom uvedie príklad reťazca *nepravého*

14 Frege (1906, 387-388). Tichý v odkaze na číslo strany uvádza 337-338, čo je zrejme preklep.

odvodenia z pseudopropozícií, čiže v tomto zmysle významovo neurčených jazykových entít – vo Fregeho zmysle hypotetických predpokladov – a ústretovo ho preformuluje na všeobecnú teorému (štrukturálne pravidlo) tvaru:

$$\frac{A, B \models C \qquad C \models D}{A, B \models D,}$$

ktorú by sme mohli nazvať pravidlom vypustenia odvodenej premisy. Používanie takéhoto pravidla je, samozrejme, skôr v súlade s technikou odvodzovania v prirodzenej dedukcii (neopakovať už dokázané) než so sekventovým kalkulom. Zdôrazňujeme, že Tichý správne akcentuje, že predpoklady podľa Fregeho musia byť pravdivé. Predmetom jeho kritiky je však *hypotetickosť predpokladov* formalistického odvodenia v zmysle významovej neurčenosti predpokladov, t. j. *sémantická hypotetickosť*, a nie ich epistemická neurčenosť.

Tretí príklad je z iného Fregeho textu (Frege 1979, 245) a je špecifický v tom, že hovorí o takzvaných *nepriamych dôkazoch*, v ktorých sa zdá byť záver odvodený z niečoho nepravdivého. Ako príklad nepriameho dôkazu predkladá dôkaz tézy, že v trojuholníku proti najdlhšej strane je najväčší uhol. Uvádza šesť jednoduchých tvrdení o vzťahoch medzi veľkosťami uhlov, resp. strán v trojuholníku, z ktorých tri a tri sa navzájom vylučujú. Ich spojením utvorí päť analyticky pravdivých implikatívnych tvrdení (napr. *Ak* β*, tak* ε: *Ak strana BC je dlhšia ako AC, tak uhol pri A je väčší ako pri B*) a za cieľ si vytýči dôkaz nového tvrdenia *Ak* ζ*, tak* γ (*Ak strana BC je kratšia ako AC, tak uhol pri A je menší ako pri B*). Potom navrhne opis osnovy nepriameho dôkazu, ktorý vychádza z predpokladu *non* γ a komentuje to, že sa zdá, akoby sme takýto dôkaz urobili z domnelej premisy *non* γ. Vzápätí urobí vlastný dôkaz, v ktorom takáto premisa nevystupuje a komentuje to tak, že nemôžeme tvrdiť, že sme urobili dôkaz z niečoho, čo nie je pravdivé a že ona údajná premisa v skutočnosti vystupuje len ako zložka antecedentu geometrickej pravdy.

Dôvody odmietnutia odvodzovania z nepravdivého predpokladu však neležia v predvídaní dvojdimenzionálnej teórie odvodzovania, ale jednoducho v tom, že ak by sme vychádzali z toho, že γ (*Strana BC je kratšia ako strana AC*) je nepravda, tak by odvodené dôsledky boli platné nie pre každý trojuholník, ale len pre trojuholníky istého typu. Geometrické pravdy o trojuholníkoch sa majú týkať všetkých trojuholníkov a sú vyjadrené napríklad implikáciami typu *Ak* β, *tak* ε. Preto Fregeho komentár:

> nemôžeme v skutočnosti povedať „predpokladajme, že [non γ]“, pretože to by mohlo vyzerať akoby [non γ] malo slúžiť ako predpoklad pre odvodenie, hoci je iba podmienkou. (Frege 1979, 246)

Frege tu však nerobí žiadnu premenu hypotetickej propozície na tautologický kondicionál *Ak* γ, *tak* γ, ako to na začiatku navrhol Tichý (1988, 235), ale vychádza z kondicionálu *Ak non* γ *a non* β, *tak* α, ktorý bol geometrickou pravdou.

Zamerajme teraz náš drobnohľad na pasáž, ktorú Tichý vložil medzi prvé dva Fregeho citáty. Hovorí v nej:

> Nekonštruujeme hypotézy, aby sme ich potom použili ako predpoklady. Vytvárame ich na to, aby sme ich mohli testovať, zistiť, či ich možno odmietnuť. Na to, aby sme hypotézu *H* odmietli odvolaním sa na fakt *non-F*, je zbytočné odvodiť *F* z *H*. Treba však odvodiť kondicionál *Ak H, tak F*, pretože inak by nám chýbala hlavná premisa pre modus tollens. Na to, aby sme odvodili tento kondicionál, nepotrebujeme predpokladať *H* ako hypotetickú premisu. (Tichý 1988, 237)

Ak textu dobre rozumieme, tak Tichý:

1. Spochybňuje hypotézu *H*;
2. Nespochybňuje (empirický) fakt *non-F,* ktorý nám má slúžiť na odmietnutie *H*;
3. Vytyčuje odvodenie kondicionálu *Ak H, tak F*, aby sme mali hlavnú premisu pre modus tollens.

Rekonštrukcia odmietnutia hypotézy H by potom vyzerala takto:

1. Z nejakých premís $A_1, \ldots, A_n$ odvodíme $H \rightarrow F$ ($A_1, \ldots, A_n \models H \rightarrow F$).
2. Keďže predpoklady $A_1, \ldots, A_n$ nie sú spochybnené, môžeme pracovať s $H \rightarrow F$ ako predpokladom (použijeme pravidlo modus ponens).
3. *Non-F* je faktom, takže môžeme podľa pravidla modus tollens odvodiť *non-H*, čiže odmietnuť hypotézu *H*.

Tento opis odvodenia je však urobený v slovníku jednodimenzionálneho pohľadu na inferenciu a podobal by sa na druhý Fregeho príklad s teorémou o vynechaní odvodenej premisy. Myslel to Tichý inak? Mali by sme odvodenie preformulovať do sekventového kalkulu? A akým spôsobom? Navyše, čo by sme tým získali?

Pokúsme sa zhrnúť naše závery z explikácie troch Fregeho príkladov. Videli sme, že ani jeden z uvedených príkladov z Fregeho prác nezahŕňa empirické propozície a nemá za cieľ odmietnuť *hypotetické predpoklady* v zmysle kognitívne neurčených empirických propozícií, ale odmietnuť buď *hypotetické predpoklady* v zmysle významovej neurčenosti (prvé dva), alebo *hypotetické predpoklady* v zmysle *predpokladov, ktoré by neboli poznané ako všeobecne (analyticky) pravdivé* (tretí). Preto si myslíme, že nie sú zjavnou oporou pre dvojdimenzionálny pohľad na odvodzovanie. Samozrejme, ako to býva s presvedčeniami, napriek dileme (D) a prípadnej adekvátnosti našich explikácií Fregeho príkladov, Tichý sa mohol Fregem v otázke dvojdimenzionálneho názoru na inferenciu inšpirovať. Myslíme si, že okrem týchto dvoch pojmov hypotetickosti (kognitívnej a sémantickej) Tichý pracoval aj s tretím logicko-sémantickým *pojmom hypotetickosti*, a to s pojmom *premenlivosti pravdivostnej hodnoty empirickej propozície* (nazvime ju *intenzionálna hypotetickosť*). Keďže na jednej strane s týmto pojmom *hypotetickosti* Frege nepracoval a bol vo všeobecnosti zástancom atemporálnosti propozícií a na druhej strane Tichý kritizuje atemporálne chápanie propozícií (1980), nie je ľahké vysvetliť, prečo mohol Tichý vidieť vo Fregem predchodcu aj v otázke dvojdimenzionálneho pohľadu na odvodzovanie. Možno v niektorých situáciách nebadane „interferovali“ či sa zamieňali všetky tri uvedené pojmy hypotetickosti: epistemická, intenzionálna a sémantická. Veď Tichý sa nikdy netajil tým, že logiku chápal ako nástroj na rozširovanie poznania a veľmi blízku k epistemológii.

9. Epistemicky „ľahko“ verzus „ťažko“ dostupné predpoklady

Tichý uvádza ešte jeden argument proti meinongovskému chápaniu predpokladu:

> Ak nás niekto vyzve predpokladať, že číslo 3 je párne, našou odpoveďou by v tomto zmysle „predpokladu“ bolo „Keďže 3 zrejme nie je párne, ďakujem, ale nebudem predpokladať, že také je. (Tichý – Tichý 1999, 83)

Toto oprávnené odmietnutie sa týka triviálneho prípadu (epistemicky ľahko dostupnej *analytickej* nepravdy), keď by sme niekoho, kto by tvrdil, že 3 je párne, zrejme zbytočne presvedčovali o opaku prostredníctvom odvodzovania vo formalizovanej Peanovej aritmetike. Môžeme oprávnene očakávať, že ak nepozná takú triviálnu pravdu, tak ťažko by pochopil povedzme axiómy aritmetiky a dôkazy z nich.

V prípade epistemicky ťažko dostupnej (nerozhodnutej) analytickej propozície ju môžeme *kvôli argumentu* predpokladať a cieľom argumentácie (resp. dedukcie) je odvodiť, či takýto predpoklad nevedie k sporu so súborom príslušných analytických presvedčení z danej oblasti (teórie).

Ak sa diskusia týka ľahko overiteľnej empirickej propozície, tak nepotrebujeme argumentáciu, ale overenie. A čo v prípade neoverenej a ťažko priamo overiteľnej alebo priamo neoveriteľnej empirickej propozície? Ak ju odmietneme, tak nerešpektujeme diskusiu. Tu nám neostáva nič iné, ako ju prijať *za predpoklad* alebo prijať predpoklady, z ktorých je odvoditeľná ona alebo jej opak. Ak ju neodmietneme, tak sme sa zaviazali s oponentom sledovať dôsledky jej prijatia alebo iných relevantných predpokladov spolu so súborom doteraz akceptovaných tvrdení. Takto to robí napr. učiteľ v diskusii so študentom, takto to robí vedec v diskusii s iným vedcom vždy, keď chce niekoho presvedčiť, že to a to nie je pravda.

10. Korekcia Tichého kritiky Meinonga

Tichého kritika Meinonga je kritikou jeho explikácie pojmu predpokladu. Meinong sa v duchu jeho obľuby neexistujúcich či pseudoexistujúcich objektov riadil tzv. *Princípom neobmedzenej slobody predpokladania*[15] a veta podľa neho vyjadruje buď súd (Urtheil), alebo predpoklad (Annahme) (Meinong 1902, §60, 272). Čiže okrem súdov – myšlienok (Gedanke), ktoré sú seriózne a o ktorých (objektívnej pravdivosti) sme aj presvedčení – pripúšťal v našej fantázii aj možnosť myšlienok, o ktorých nie sme presvedčení (Meinong 1902, §61, 277) (môžu sa týkať aj „logicky“ sporných objektov (Štvorhraný kruh je kruh) či nereálnych objektov (Zlatá hora je zlatá). Práve tieto fantazijné myšlienky označil za *predpoklady*.

Meinong si však uvedomil, že bezbrehý princíp slobody predpokladania by viedol k otvoreným rozporom – na úrovni výrokovej logiky rešpektoval (alebo pokúšal sa rešpektovať) princíp neprotirečivosti (vylúčenia logického sporu) – napríklad s tým, čo sme už doposiaľ predpokladali. Preto hovorí,

15 „Das Prinzip der unbeschränkten Annahmefreiheit“ – Meinong (1910, §60, 346).

že *Princíp neobmedzenej slobody predpokladania* platí pre *izolované* predpoklady, ale pre viaceré predpoklady platí čosi ako *Princíp relatívnej obmedzenosti predpokladania*. Ako príklad uvádza, že keď raz predpokladáme, že A bolo B a B bolo C, tak nemôžeme predpokladať nič iné než to, že A bolo C (Meinong 1910, §60, 346).

Takto explikovaný význam výrazu *predpoklad* nie je v súlade s bežným významom tohto slova, napriek tomu sa mu – až na jeho „zažratý“ psychologizmus – dá rozumieť. Podľa všetkého naša sústava predpokladov môže (podľa Meinonga) obsahovať napríklad len nepravdivé empirické predpoklady spolu s ich logickými dôsledkami. Z hľadiska rozširovania empirického poznania by takáto sústava navzájom konzistentných, ale empiricky nepravdivých predpokladov bola bezcenná. V tomto zmysle je Tichého kritika Meinonga úplne oprávnená.

Takto explikovaný pojem predpokladu však nezahŕňa význam výrazu „predpoklad“ v zmysle *významu výroku, o ktorom vieme alebo prinajmenej sme presvedčení, že je pravdivý*. Nejde teda o pojem predpokladu$_{E1}$, na ktorý si Meinong rezervoval pojem *súd*.

Meinongov pojem predpokladu má základnú črtu pojmu predpokladu *kvôli argumentu* – nemusíme byť o ňom presvedčení, ale ak ho raz predpokladáme, tak sme zaviazaní brať ako platné aj všetky jeho logické dôsledky.

Predpoklad *kvôli argumentu* môže byť pravdivý a my o tom môžeme, ale nemusíme vedieť a o jeho prípadnej pravdivosti presvedčovaný subjekt nemusí vedieť. Predpoklad *kvôli argumentu* môže byť nepravdivý a my opäť o tom môžeme, ale nemusíme vedieť, rovnako ako o jeho prípadnej nepravdivosti nevie presvedčovaný subjekt. Predpoklad, ktorý je nepravdivý, a my o tom vieme, môžeme v presvedčovaní úspešne použiť ako východisko argumentu, ktorý vedie k sporu s inými presvedčeniami druhej strany (agensa). V tomto zmysle – pre ciele presvedčovania – nie je bezcenným predpokladom. Tichý má pravdu v tom, že v takomto prípade nám nestačí sám predpoklad, ale aj nejaký platný kondicionál, v ktorom je skúmaný predpoklad v pozícii antecedentu a môžeme takto odvodiť nové tvrdenie, ktoré bude napríklad v spore s niektorým tvrdením, ktoré už agens akceptuje.

11. Záver

Tichého kritika Kleeneho pojmu „arbitrárneho“ objektu je oprávnená. Prvá metodologická výhrada voči jednodimenzionálnej teórii inferencie z pohľadu dvojdimenzionálne teórie inferencie je skôr otázkou kognitívnej alebo metodologickej vhodnosti toho alebo onoho postupu, a preto vo svojej podstate epistemickou (empirickou) otázkou. Druhá metodologická výhrada by prestala byť výhradou, keď by sa podarilo pravidlá systému prirodzenej dedukcie redefinovať na základe Tichým navrhnutého objektuálneho prístupu ako relácie medzi množinou konštrukcií vyjadrených premisami a konštrukciou vyjadrenou v závere.

Tichého kritika Meinongovho pojmu predpokladu je oprávnená v tom, že explikácia používania výrazu „predpoklad" vedie aj k logickému pojmu predpokladu – tzv. kategorického tvrdenia, s ktorým nespájame stupňovateľný kognitívny postoj; tento prípad pojmu Meinong svojvoľne nezahrnul pod jeho pojem predpokladu.

Tichý však pojem *predpokladu kvôli argumentu – predpoklad* $_{E2}$, ktorý sám používal, neurobil jedným z výsledkov explikácie pojmu predpoklad a ak by sme sa pridŕžali jeho odmietania epistemicky *hypotetických predpokladov*, nemohli by sme použiť logiku ako nástroj na rozširovanie empirického poznania, ale len na rozširovanie analytického (logického) poznania. Hoci mnohé jeho príklady sú práve analytického charakteru, predsa len jeho špeciálny paradigmatický príklad taký nie je: má demonštrovať, ako logika umožňuje rozširovať empirické poznanie a meniť presvedčenia. Takéto pravé presvedčenia nedokonalých skúmateľov ako *predpoklady*$_{E1}$ sa však môžu stať východiskom ďalšieho odvodzovania a rozširovania poznania.

Literatúra

DUŽÍ, M. (2010): The Paradox of Inference and the Non-Triviality of Analytic Information. *Journal of Philosopical Logic* 39, 473-510.

FREGE, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle.

FREGE, G. (1906): Über die Grundlagen der Geometrie (II). *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15, 293-309 (Part I), 377-403 (Part II), 423-430 (Part III). Translation as 'On the Foundations of Geometry (Second Series)' by E.-H. W. Kluge. In: *On the Foundatons of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*. New Haven: Yale University Press, 1971.

FREGE, G. (1979): *Posthumous Writings*. Hermes, H. – Kambartel, F. – Kaulbach, F. (eds.). Transl. by P. Logan and R. White. Oxford: Blackwell.

FREGE, G. (1992): O zmysle a denotáte. *Filozofia* 47, č. 6, 349-363.

FORBES, G. (1994): *Modern Logic. A Text in Elementary Symbolic Logic.* New York - Oxford: Oxford University Press.

GAHÉR (2006): *Stoická sémantika a logika z pohľadu intenzionálnej logiky*. Bratislava: Univerzita Komenského.

GENTZEN, G. (1934/5): Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210, 405-431. Translated as 'Investigations into Logical Deduction'. In: Szabo, M.: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland, 1969, 68-131.

MEINONG, A. (1902): *Über Annahmen.* Leipzig: Verlag J.A. Barth.

MEINONG, A. (1910): *Über Annahmen.* 2. Auflage. Preklad *On Assumptions,* 1983.

MEINONG, A. (1977): *Über Annahmen.* Bearbeitet von R. Haller, Graz.

TICHÝ, P. (1976): *Introduction to Intensional Logic*. Manuscript.

TICHÝ, P. (1980): The Logic of Temporal Discourse. *Linguistics and Philosophy* 3, 254-260.

TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin – New York: W. de Gruyter.

TICHÝ, P. – TICHÝ, J. (1999): On inference. In: Childers, T. (ed.): *The Logica Yearbook 1998*. Prague: Filosofia, 73-85.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 98-111

Využitie pojmu *zhoda* v hyperintenzionálnej dedukcii[1]

LUKÁŠ BIELIK

Katedra logiky a metodológie vied. Filozofická fakulta. Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovenská republika
bielikluc@yahoo.com

FRANTIŠEK GAHÉR

Katedra logiky a metodológie vied. Filozofická fakulta. Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovenská republika
frantisek.gaher@uniba.sk

ZASLANÝ: 12-01-2013 ▪ AKCEPTOVANÝ: 11-04-2013

Abstract: The paper deals with the usefulness of Pavel Tichý's concept of *match* between two (or more) constructions for the deduction and inference considerations. Tichý's preference of the two-dimensional view on inference instead of the one-dimensional view is criticized. The reasons for the implementation of the *match* concept are elucidated. The logical expressiveness of the *match* concept is demonstrated through its implementation to the Natural Deduction System explicated in the hyperintensional framework of Transparent Intensional Logic.

Keywords: Deduction – inference – match – Natural Deduction – Sequent Calculus – Transparent Intensional Logic.

1 Táto stať vznikla na Filozofickej fakulte UK v Bratislave v rámci grantu VEGA č. 1/0046/11 *Sémantické modely, ich explanačná sila a aplikácia*. Autori ďakujú anonymnému recenzentovi za podnetné pripomienky, ktoré pomohli odstrániť viaceré nedostatky z pôvodnej verzie state.

Český logik Pavel Tichý predstavil v niekoľkých prácach svoje názory na povahu logiky a osobitne dedukcie, ktoré vychádzajú z teoretického rámca ním navrhnutého systému (T)ransparentnej (I)ntenzionálnej (L)ogiky. A aj keď jeho práce z konca sedemdesiatych a začiatku osemdesiatych rokov 20. storočia zdôrazňujú odlišné aspekty inferencie a dedukcie než jeho vrcholné dielo, reprezentované predovšetkým prácou *The Foundations of Frege's Logic* z roku 1988 (Tichý 1988), či jeho štúdiou *On Inference* (koautorovanou jeho manželkou Jindrou; pozri Tichý – Tichý 2004/[1999]), spoločné im je preferovanie doplneného a modifikovaného sekventového kalkulu Gerharda Gentzena, ktorý Tichý považuje za vhodný systém pre explikáciu povahy dedukcie, resp. logickej inferencie.

Voľba sekventového kalkulu ako rámca pre Tichého rozpracovanie dedukcie je podmienená okrem iného aj jeho presvedčením, že logické odvodzovania, ergo inferencie, sú vlastne derivačné kroky od určitých vyplývaní k iným vyplývaniam. Keďže pravidlá sekventového kalkulu zachovávajú platnosť (a nielen pravdivosť, ako je to napríklad v prípade pravidiel prirodzenej dedukcie!), pretože reprezentujú deriváciu určitého platného sekventu z množiny platných sekventov, tento deduktívny rámec predstavuje pre Tichého „vhodnú pôdu" pre rozpracovanie jeho úvah o dedukcii.

V ostatnom čase sme mohli postrehnúť viaceré fundačné, interpretačné i evolučné práce, ktoré sa v rôznej miere venujú analytickým i deduktívnym aspektom TIL (pozri napríklad Duží – Jespersen – Materna 2011, Raclavský – Kuchyňka 2011, Raclavský 2012, najnovšie aj Duží – Materna 2012).

Práve ostatné Raclavského štúdie (Raclavský – Kuchyňka 2011; resp. Raclavský 2012) nás viedli k premysleniu Tichého názorov na dedukciu. V tom, čo nasleduje, najskôr stručne predstavíme Tichého argumenty v prospech tzv. dvojdimenzionálneho prístupu k dedukcii, ktorý inferenciu chápe ako reláciu medzi určitou množinou vyplývaní a iným vyplývaním. Následne poukážeme na dôvody, pre ktoré považujeme takýto prístup za problematický. Nakoniec zvážime využitie pojmu *zhody* pri explikácií pravidiel prirodzenej dedukcie pracujúcej nad propozičnými konštrukciami a naznačíme, nakoľko možno Tichého intuície spojené s dedukciou korigovať.

1

Začnime Tichého vrcholným dielom. Tichý v prácach (1988, kap. 13) a Tichý – Tichý (2004[1999]) približuje svoje filozofické dôvody, ktoré ho vedú k prijatiu sekventového kalkulu gentzenovského typu ako teoretického rámca pre vlastnú explikáciu dedukcie.

Tichý začína 13. kapitolu (s názvom *Inference*) svojej práce (1988) pripomenutím toho, na akom druhu entít vlastne (logické) odvodzovanie „operuje". Najskôr totiž na príkladoch matematických inferencií ukazuje, že „[na] inferenciu je možné najlepšie pozerať sa ako na operáciu na propozičných *konštrukciách*, a nie na propozíciách" (1988, 235). No vzápätí uvádza dva odlišné pohľady na inferenciu, ktoré možno s takouto koncepciou spájať, a to podľa toho, akú úlohu v inferenciách prisudzujeme hypotézam ako predpokladom, či presnejšie dôkazu z hypotéz (k odlišným pojmom predpokladu, s ktorými Tichý – aspoň implicitne – pracuje, pozri Gahér – Bielik 2013). Tichý doslova uvádza:

> Máme tu teda dva pohľady na úlohu, ktorú hypotézy hrajú pri dedukcii, ktoré si môžeme osvojiť. Podľa prvého pohľadu kroky inferencie berú hypotézy ako také za premisy a vedú k tomu, čo z týchto hypotéz vyplýva. Toto môžeme nazvať *jednodimenzionálnym* pohľadom na inferenciu. Podľa druhého, *dvojdimenzionálneho* pohľadu, kroky inferencie neoperujú na hypotézach ako takých, ale na komplexoch zložených z antecedentov a konzekventov, t. j. na vyplývaniach, v ktorých sa hypotézy objavujú ako antecedenty. Inferenčným krokom sa tak dostávame od jedného alebo viacerých platných vyplývaní tohto druhu k ďalšiemu platnému vyplývaniu. (Tichý 1988, 235)

Tichého odmietnutie usudzovania z hypotéz, ktoré sa pokúša doložiť už u Fregeho, nahrádza dvojdimenzionálnym pohľadom, pre ktorého rozvinutie využíva práve Gentzenov sekventový kalkul. (Treba však doplniť, že Tichý v Tichý 1988, 240-249 interpretuje aj Gentzenov kalkul prirodzenej dedukcie tak, aby bol zlučiteľný s jeho dvojdimenzionálnym pohľadom. Napriek tomu však využíva sekventový kalkul, ktorý podľa neho implementuje dvojdimenzionálnu koncepciu inferencie explicitnejšie.)

Gentzenove sekventy sú totiž komplexy reprezentované ako

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$$

kde A_i predstavuje antecedenty a B sukcedent(y) sekventu, pričom znak „$\Rightarrow$" reprezentuje reláciu vyplývania. Sekvent je platný, ak jeho sukcedent vyplýva z jeho antecedentov. Pravidlá odvodenia (inference rules) Gentzenovho systému nás podľa Tichého dostávajú od platných sekventov k iným platným sekventom. Teda ak Φ_i nám bude reprezentovať množinu antecedentov sekventu a Σ_i prvky sukcedentu sekventov, tak pravidlá odvodenia môžeme vyjadriť v tvare:

(Seq) $\Phi_1 \Rightarrow \Sigma_1, \ldots, \Phi_n \Rightarrow \Sigma_n \models \Phi \Rightarrow \Sigma$

Pravidlá formy (Seq) hovoria, že vždy, keď sú sekventy formy $\Phi_1 \Rightarrow \Sigma_1, \ldots, \Phi_n \Rightarrow \Sigma_n$ platné, je platný aj sekvent $\Phi \Rightarrow \Sigma$. O sekvente $\Phi \Rightarrow \Sigma$ potom môžeme povedať, že je odvoditeľný podľa pravidla (Seq) – porovnaj napríklad Tichý (2004/[1982], 473).

Je zaujímavé (a upozorňuje na to aj Jan Štěpán v práci Materna – Štěpán 2003, 109), že Tichý sa vo svojej vrcholnej práci (1988) vôbec nezmieňuje o pojme *zhoda*, ktorý zaviedol a používal vo svojich predchádzajúcich prácach; pozri napríklad Tichý (2004/[1982]), Oddie – Tichý (2004/[1982]) či Tichý (2004/[1986]).

Okrem iného, práve pojem *zhody* robí TIL ako široký rámec dedukcie zaujímavým a expresívnym. Tichý *zhodu* prvýkrát definuje v (2004/[1982], 472-473) ako usporiadanú dvojicu, ktorej prvým prvkom je α-objekt alebo α-premenná **a**, a ktorej druhým prvkom je α-konštrukcia **A**. Zhodu označuje

a : A

Dnes by sme preferovali Raclavského doplnenie (z Raclavský 2009, 286), ktoré súvisí s Tichého implementáciou konštrukcie nazvanej *trivializácia* v jeho vrcholnom diele, a povedali by sme, že zhoda je usporiadaná dvojica, ktorej ľavú stranu tvorí premenná alebo trivializácia α-objektu a pravá strana je určitá (obvykle zložená) konštrukcia v-konštruujúca α-objekt. Zároveň by sme doplnili, že *zhoda* je konštrukcia v-konštruujúca funkciu, ktorá usporiadaným dvojiciam konštrukcií ⟨**a**, **A**⟩ priraďuje pravdivostnú hodnotu T (Pravda), ak obe konštrukcie v-konštruujú ten istý objekt; v opačnom prípade im priraďuje pravdivostnú hodnotu F (Nepravda). Alternatívne by sme mohli zhodu explikovať ako propozíciu, ktorá je v určitých svetamihoch (⟨možný svet, časový okamih⟩) pravdivá, v iných nepravdivá.

Povieme, že valuácia v spĺňa zhodu **a : A**, ak **a** aj **A** v-konštruujú ten istý objekt. Tichý kvôli parcialite funkcií konštruovaných konštrukciami pripúšťa v dedukcii aj zhody tvaru **: A**, kde ľavá strana zhody chýba. Ak chce teda povedať, že konštrukcia **A** je v-nevlastná, povie, že zhodu **: A** spĺňa valuácia v (por. Tichý 2004/[1982], 473).

V princípe by sme mohli Tichého pojem *zhody* rozšíriť na n-ticu konštrukcií a hovoriť, že zhodu medzi **a** : $\mathbf{A}_1$: $\mathbf{A}_2$: … : $\mathbf{A}_n$ spĺňa valuácia v, ak konštrukcie **a** a $\mathbf{A}_1$ a … a $\mathbf{A}_n$ v-konštruujú ten istý objekt.

Spomenuli sme, že Tichý vo svojom vrcholnom diele (1988) nikde vo svojich úvahách o dedukcií sa nezmieňuje o pojme *zhody*. Naproti tomu v práci (2004/[1982]), v ktorej predstavuje systém parciálnej (jednoduchej) teórie typov pre svoju teóriu konštrukcií, zavádza pojem *zhody* a implementuje ho do sekventového kalkulu. Sekvent formy $\Phi \Rightarrow \Sigma$ sa skladá z množiny zhôd Φ a zo zhody Σ. Sekvent formy $\Phi \Rightarrow \Sigma$ je platný, ak každá valuácia, ktorá spĺňa množinu zhôd Φ (t. j. každý prvok množiny Φ), spĺňa aj zhodu Σ. Derivačné pravidlá teda vyjadrujú (resp. predpisujú) kroky od (množiny) platných sekventov k inému platnému sekventu. Do dedukcie sa tak cez sekventy dostávajú zhody.

Načo sú však zhody pre dedukciu potrebné? Aká je ich využiteľnosť pre inferenciu? Jan Štěpán v práci Materna – Štěpán (2003, 112) rekapituluje dva hlavné dôvody: 1. hoci entity vstupujúce do zhody nemusia mať charakter propozícií (môže ísť o konštrukcie konštruujúce objekty iných typov), zhody už tento charakter majú; a 2. prostredníctvom (pojmu) zhody možno implicitne zaviesť pojem sporu.

V tretej časti nášho príspevku zvážime ešte ďalšiu možnosť využitia pojmu *zhody* – na explikáciu sémantiky pravidiel prirodzenej dedukcie nad propozičnými konštrukciami. Predtým však zrekapitulujme stručne dôvody, pre ktoré Tichý preferuje dvojdimenzionálny pohľad na inferenciu (odvodzovanie).

2

Tichý dáva do protikladu usudzovanie z hypotéz ako predpokladov k usudzovaniu z právd. Niekedy však vo svojich formuláciách naznačuje, akoby opakom usudzovania z hypotéz ako predpokladov bolo usudzovanie z *nevyhnutných právd* a, naopak, akoby opakom usudzovania z *nevyhnutných právd* bolo usudzovanie z hypotéz ako predpokladov.

Keď sa Tichý pokúša demonštrovať, že jednodimenzionálny pohľad na dedukciu je neudržateľný, konštatuje:

> Nie je totiž ťažké ukázať, že pojem odvodenia [the notion of inference] z hypotéz nedáva zmysel. Predpokladajme, že odvodím
>
> (1) Peter je špión

> z čisto hypotetického predpokladu, že
>
> (2) Peter a Pavol sú špióni.
>
> Čo som sa vďaka tomu dozvedel? Sotva som sa dozvedel, že (1) je pravdivý či dokonca pravdepodobný [výrok]. V skutočnosti som sa o (1) ako takom nedozvedel vôbec nič. To, čo som sa dozvedel, je, že (1) je pravdivý, takpovediac, *na základe*, resp. *podľa* predpokladu (2). (Tichý 1988, 235-236)

A svoje zdôvodnenie hneď následne rozvíja v tvrdení, že výsledkom inferencie nie je výrok (1), ale výrok o vyplývaní (1) z (2). A Tichý pokračuje:

> Tento výrok je však pravdivý kategoricky. Ide o prípad nepodmienečne platného logického princípu, princípu, ktorý hovorí, že z konjunkcie vyplýva ktorýkoľvek z konjunktov. (Tichý 1988, 236)

V prvom rade je zvláštne, že Tichý sa pokúša na tomto príklade (hoci nie výlučne len na ňom) ukázať, *aká je povaha inferencie*. Uvedený príklad totiž možno stotožniť s prípadom (logicky) platného sekventu. Ak by sme to vyjadrili inak, ide o inferenčné pravidlo formy $\models \Phi \Rightarrow \Sigma$ s prázdnou množinou sekventov $\{\Phi_1 \Rightarrow \Sigma_1, \ldots, \Phi_n \Rightarrow \Sigma_n\}$, pričom množinu Φ tvorí konjunkcia dvoch výrokov (propozičných konštrukcií) a Σ tvorí ktorýkoľvek z konjunktov Φ. Ak teraz ponecháme bokom otázku, či do sekventov vstupujú aj zhody (ako to robí aj Tichý v 1988), tak by sme sa mohli pýtať, v čom zásadnom sa líši zachytenie vyplývania medzi (1) a (2) prostredníctvom príslušného pravidla odstránenia konjunkcie v systéme prirodzenej dedukcie (teda pravidla, ktoré si môžeme reprezentovať ako: $A \wedge B \vdash A$). Veď ani toto pravidlo nehovorí nič konkrétne o pravdivosti A, resp. pravdivosti $A \wedge B$, ale o relácií (logickej odvoditeľnosti, resp. vyplývania) medzi A a $A \wedge B$. Napokon, v tretej časti sa pokúsime ukázať, aké sú možnosti explicitnej sémantickej reprezentácie pravidiel prirodzenej dedukcie (resp. jej fragmentu) pomocou pojmu *zhoda*.

Vráťme sa však k Tichého odmietaniu inferencie z hypotéz. Zdá sa totiž, že Tichý zakladá svoj argument na nedostatočnej dištinkcii. Ako sme konštatovali, Tichý, zdá sa, považuje usudzovanie z hypotéz ako predpokladov za opak usudzovania z *nevyhnutných právd* a naopak. Hypotézy ako predpoklady však nemusia byť opozitom nevyhnutných právd. Prijať v usudzovaní za pravdivý nejaký výrok, či presnejšie, propozíciu, ešte neznamená určiť, či ide o (zložitý) analytický výrok, ktorý je nevyhnutne pravdivý (vzhľadom na danú sústavu pojmov-konštrukcií) alebo ide o empirický výrok, ktorý môže byť kontingentne pravdivý. Inak povedané, predpokladom v usudzovaní sa môže stať buď analytický, alebo empirický výrok. Na druhej strane, hovoriť o pravdách neznamená hovoriť automaticky o nevyhnutných pravdách. (Viac o odlišných pojmoch predpokladov a ich vzťahu k Tichého argumentom v prospech dvojdimenzionálneho pohľadu na inferenciu pozri v Gahér – Bielik 2013).

Ak je naša úvaha korektná, tak keď hovoríme o inferencií z predpokladov (pojem tzv. *logického predpokladu*), musíme rozlišovať tieto možnosti: buď je inferenčný predpoklad (*i*) analyticky (t. j. nevyhnutne) pravdivý, alebo (*ii*) empiricky (t. j. kontingentne) pravdivý, resp. (*iii*) analyticky nepravdivý alebo (*iv*) empiricky nepravdivý.

Zdá sa teda, že Tichý tu spája epistemologické aspekty argumentácie s logickou stránkou inferencií. Zbavenie sa problému hypotetickosti predpokladov ich premenením na logicky pravdivé implikácie bráni použitiu logiky na rozširovanie empirického poznania a na zmenu presvedčenia, ktoré Tichý obhajoval.

Keď totiž usudzujeme a ide nám o pravdivosť empirických výrokov (propozícií), tak naše usudzovanie môže obsahovať dve odlišné kategórie chýb: Prvá sa týka toho, že z určitej množiny výrokov logicky neoprávnene – t. j. chybne – odvodíme iný výrok (o ktorého pravdivosť nám pri skúmaní môže ísť); chyba druhej kategórie spočíva v tom, že aspoň jeden z výrokov, z ktorých naše odvodenie vychádza, nie je pravdivý, a teda aj v prípade, že sme použili logicky správnu inferenciu, záver tejto inferencie nemusí byť pravdivý.

A práve možnosť, že sa môžeme pri usudzovaní, resp. odvodzovaní mýliť aspoň v jednom z našich (napr. empirických) predpokladov, Tichého prístup k dedukcii nepripúšťa. Dvojdimenzionálny pohľad na inferenciu pripúšťa len nevyhnutné pravdy – vyplývania platných sekventov z iných platných sekventov. Ako nám však môže potom inferencia poslúžiť pri poznávaní empirických právd, keď tie nie sú v derivačných pravidlách sekventov prítomné?

3

Keďže si myslíme, že pojem *zhody* možno využiť aj v inom inferenčnom systéme, a to bez toho, aby sme uvažovali o inferenčných pravidlách ako o krokoch od množiny vyplývaní k inému vyplývaniu, pokúsime sa v nadväznosti na uvedené práce (najmä Raclavský 2012, Raclavský – Kuchyňka 2011 a Materna – Štěpán 2003), predstaviť sémantickú verziu pravidiel prirodzenej dedukcie, ktoré operujú nad propozičnými konštrukciami s využitím pojmu *zhoda*. Náš postup pritom preberá základnú schému niektorých odvodzovacích pravidiel z práce Oddie – Tichý (2004/[1982]), kde sa však inferencia realizuje na sekventoch, a nie medzi zložkami sekventov.[2] My túto schému modifikujeme tak, aby v nej boli zachytené aj propozície, resp. propozičné konštrukcie, no zároveň ju presúvame z prostredia sekventového kalkulu do prostredia (fragmentu) systému prirodzenej dedukcie.

Keď tak urobíme, pokúsime sa zodpovedať aj tieto dve otázky:

1. Ako sa dá Tichého požiadavka, aby v derivačných pravidlách vystupovali len nevyhnutné pravdy (tautológie), zladiť s tým, že v úsudkoch pracujeme aj s empirickými (náhodnými) pravdami?
2. V akom vzťahu sú pravidlá β-redukcie, α-redukcie, či η-redukcie, ktoré TIL využíva, k nami prezentovanej explikácii (fragmentu) pravidiel prirodzenej dedukcie?

Predstavme teda náš návrh sémantického modelovania dedukcie v rámci rozvetvenej teórie typov pre systémy prirodzenej dedukcie. Teraz vypúšťame exaktné definície Tichého rozvetvenej teórie typov (čitateľa odkazujeme na prácu Tichý 1988, resp. na ktorúkoľvek z už zmienených publikácií o TIL) a predstavujeme len definície tých pojmov, s ktorými budeme ďalej bezprostredne pracovať.

Definícia (pojmu) zhody

Konštrukcia **a:A**, kde **a** je premenná v-konštruujúca objekt určitého typu α alebo trivializácia tohto objektu a **A** je konštrukcia v-konštruujúca objekt určitého typu β, v-konštruuje zhodu, t. j. funkciu M, ktorá usporiadanej dvojici konštrukcií ⟨**a, A**⟩, (resp. ⟨**__, A**⟩), priradí pravdivostnú hodnotu Pravda (T), ak $\alpha=\beta$, teda ak **a** aj **A** v-konštruujú ten istý objekt (resp. keď **A** je v konštrukcii **__:A** v-nevlastná). V opačnom prípade M priradí tejto dvojici pravdivostnú hodnotu Nepravda (F).

Povieme teda, že zhodu M splĺňa valuácia v, ak **a** aj **A** v-konštruujú ten istý objekt.

---

[2] Máme na zreteli napríklad pravidlo 2.19, ktorého forma vyjadruje vlastne známe pravidlo Modus ponendo ponens: $\Phi \Rightarrow$T: I$\supset$J; $\Phi \Rightarrow$T: I $\models$ $\Phi \Rightarrow$T: J; kde T je pravdivostná hodnota Pravda a I a J sú premenné pre pravdivostné hodnoty.

Pojem vyplývania v TIL možno vymedziť viacerými spôsobmi. Spoločné im je však jedno: Vyplývanie sa modeluje primárne ako relácia medzi propozičnými konštrukciami, resp. ako relácia medzi propozíciami a až sekundárne ako relácia medzi výrokmi.

Keď sme v prvej časti charakterizovali platný sekvent, využili sme pri tom pojem vyplývania založený na pojme spĺňania zhôd (v antecedente, resp. sukcedente sekventu). Keďže budeme ďalej pracovať s pojmami propozičných konštrukcií a propozícií, bude vhodné, ak explikujeme pojem vyplývania medzi propozíciami (v-konštruovanými propozičnými konštrukciami príslušných rádov) a následne aj odvodený pojem vyplývania medzi výrokmi.

Definícia vyplývania medzi propozíciami

Nech $p_1, ..., p_n, q$ sú konštrukcie v-konštruujúce propozície $p_1, ..., p_n$, q; a nech w, t sú premenné v-konštruujúce možné svety w_i, a časové okamihy t_j. Povieme, že propozícia q vyplýva z propozícií $p_1, ..., p_n$ práve vtedy, keď pre každú valuáciu v a pre ľubovoľné $\langle w_i, t_j \rangle$ platí, že v tých $\langle w_i, t_j \rangle$ a pri tých valuáciách v, v ktorých sú pravdivé všetky propozície $p_1, ..., p_n$, je pravdivá aj propozícia q.

Definícia vyplývania medzi výrokmi

Nech $V_1, ..., V_n$, V sú výroky jazyka *J* označujúce (v poradí) propozície $p_1, ..., p_n$, q. Povieme, že výrok V vyplýva z výrokov $V_1, ..., V_n$ v jazyku *J*, ak propozícia q označená výrokom V vyplýva z propozícií $p_1, ..., p_n$ označených výrokmi $V_1, ..., V_n$.[3]

Uvedené definície teraz môžeme bezprostredne využiť na definovanie platného úsudku.

Definícia platného úsudku

Nech $V_1, ..., V_n$ / V je úsudok, kde $V_1, ..., V_n$ sú jeho premisy a V záver úsudku. Povieme, že úsudok $V_1, ..., V_n$ / V je platný (t. j. logicky správny), ak jeho záver vyplýva z premís.

Keďže sme si definovali základné sémantické pojmy, s ktorými budeme ďalej pracovať, pozrime sa, ako nám môžu pomôcť pri explikácii (fragmentu) systému prirodzenej dedukcie v logickom rámci konštrukcií TIL.

---

[3] Ďakujeme anonymnému recenzentovi za poznámku, že definíciu vyplývania medzi výrokmi je vhodné relativizovať vždy k určitému jazyku.

Ukážeme, že pravidlá prirodzenej dedukcie môžeme zasadiť do hyperintenzionálneho rámca TIL pomocou pojmu (konštrukcie) *zhody*, kde prvým prvkom funkcie-zhody budú trivializácie pravdivostnej hodnoty Pravda (T), resp. Nepravda (F) a druhým prvkom budú zložené konštrukcie – tzv. kompozície, ktorých podkonštrukciami budú jednak trivializácie logických funkcií, ako sú konjunkcia, disjunkcia a pod., jednak propozičné premenné – teda konštrukcie *p, q, r,* ..., *v*-konštruujúce propozície, t. j. objekty typu $((o\tau)\omega)$, skrátene $o_{\tau\omega}$, aplikované (pod-kompozíciami) na (*v*-konštruované) hodnoty premenných *w* a *t* (kompozíciu $[[pt]w]$, ktorá *v*-konštruuje pravdivostnú hodnotu propozície p na argumentoch w a t, budeme skrátene zapisovať p_{wt}).

Zápis týchto pravidiel tak predstavuje sémantickú verziu fragmentu pravidiel prirodzenej dedukcie pre nekvantifikované výroky (v tomto prípade vychádzame z pravidiel prirodzenej dedukcie Borkowského typu – pozri napríklad Gahér 2003, resp. Zouhar 2008).[4]

Modus ponens (MP)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}: [{}^0\!\rightarrow p_{wt}\ q_{wt}] \qquad {}^0\mathrm{T}: p_{wt}}{{}^0\mathrm{T}: q_{wt}}$$

Zavedenie implikácie (ZI)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}: q_{wt}}{{}^0\mathrm{T}: [{}^0\!\rightarrow p_{wt}\ q_{wt}]}$$

Odstránenie konjunkcie (OK)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}: [{}^0\!\wedge p_{wt}\ q_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}: p_{wt}} \qquad \frac{{}^0\mathrm{T}: [{}^0\!\wedge p_{wt}\ q_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}: q_{wt}}$$

Zavedenie konjunkcie (ZK)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}: p_{wt} \qquad {}^0\mathrm{T}: q_{wt}}{{}^0\mathrm{T}: [{}^0\!\wedge p_{wt}\ q_{wt}]}$$

4 Pravdou je, že takáto sémantická explikácia fragmentu pravidiel prirodzenej dedukcie nezohľadňuje parcialitu propozícií. Ak by sme parcialitu pripustili, viaceré pravidlá by neboli platné (napríklad pravidlo (ZI) či (ZD)).

Zavedenie disjunkcie (ZD)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}\colon p_{wt}}{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}]} \qquad \frac{{}^0\mathrm{T}\colon q_{wt}}{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}]}$$

Odstránenie disjunkcie (OD)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}] \quad {}^0\mathrm{F}\colon p_{wt}}{{}^0\mathrm{T}\colon q_{wt}} \qquad \frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}] \quad {}^0\mathrm{F}\colon q_{wt}}{{}^0\mathrm{T}\colon p_{wt}}$$

$$\frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}] \quad {}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\neg\ p_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}\colon q_{wt}} \qquad \frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}] \quad {}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\neg\ q_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}\colon p_{wt}}$$

Zavedenie ekvivalencie (ZE)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\rightarrow p_{wt}\ q_{wt}] \quad {}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\rightarrow q_{wt}\ p_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\leftrightarrow p_{wt}\ q_{wt}]}$$

Odstránenie ekvivalencie (OE)

$$\frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\leftrightarrow p_{wt}\ q_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\rightarrow p_{wt}\ q_{wt}]} \qquad \frac{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\leftrightarrow p_{wt}\ q_{wt}]}{{}^0\mathrm{T}\colon [{}^0\rightarrow q_{wt}\ p_{wt}]}$$

Čo majú vlastne uvedené pravidlá vyjadrovať?! Domnievame sa, že ich potenciál je nasledovný:

Venujme sa najskôr pravým stranám zhôd v premisách i záveroch úsudkových schém, ktoré v týchto pravidlách vystupujú. Môžeme konštatovať, že ich hyperintenzionálna (t. j. konštrukčná) forma je taká, že v prípade, že sú propozície na pravých stranách zhôd premís v svetamihoch ⟨w, t⟩ pravdivé, sú v týchto svetamihoch pravdivé aj propozície v záveroch týchto pravidiel. To znamená, že na to, aby sme vyjadrili platnosť niektorých našich úsudkov, stačí, aby sme sledovali len pravé strany zhôd daných pravidiel (resp. ich lambda-viazané varianty), alebo sa jednoducho sústredili len na zredukované pravidlá, ako napr.:

$$(\mathrm{ZD}^{\mathrm{R}}) \qquad \frac{p_{wt}}{[{}^0\vee\ p_{wt}\ q_{wt}]}$$

respektíve:

$$(\mathrm{ZD}^{\mathrm{P}}) \quad \frac{\lambda w\, \lambda t\, [p_{wt}]}{\lambda w\, \lambda t\, [{}^{0}\!\vee\, p_{wt}\, q_{wt}]}$$

Načo je potom dobré vyjadriť tieto pravidlá vo forme prechodu od zhôd v premisách úsudku ku zhode v závere úsudku, pričom na ľavej strane zhôd (ako prvý prvok zhody) vystupujú trivializácie pravdivostnej hodnoty (T, resp. F)?

Odpoveď nemusí byť na prvý pohľad intuitívna, ale skúsme ju preveriť. To, čo touto reprezentáciou pravidiel zamýšľame vyjadriť, možno zhrnúť takto: Úsudky môžu byť samozrejme platné aj vtedy, keď je záver nepravdivý, prípadne keď premisa alebo premisy nie sú pravdivé (pozri naše definície). Ak však chceme navyše vyjadriť skutočnosť, že vždy, keď sú premisy logicky platného úsudku pravdivé, je, resp. musí byť pravdivý aj záver úsudku, môžeme k tomu použiť uvedené pravidlá (MP) – (OE), resp. ďalšie (odvodené) pravidlá. Umožňuje nám to práve pojem *zhody*: Pre tieto pravidlá totiž platí, že pri každej valuácii *v* a vo všetkých svetamihoch ⟨w,t⟩, v ktorých sú spĺňané zhody z premís, je spĺňaná aj zhoda v závere. Inak povedané, ak konštrukcie na pravých stranách zhôd premís príslušných úsudkov *v*-konštruujú pravdivostnú hodnotu T, bude ju konštruovať aj pravá strana zhody v závere úsudku. To samozrejme neznamená, že nejaký aktuálny úsudok, ktorý je platný, musí spĺňať príslušné zhody.

Vezmime si napríklad úsudok:

(U1) Ak Bratislava je rieka, tak Dunaj je mesto.
Bratislava je rieka.
――――――――――――――――
Dunaj je mesto.

Ak nahradíme propozičnú konštrukciu *Bratislava je rieka*, ktorá je významom vety „Bratislava je rieka“, propozičnou premennou p a propozičnú konštrukciu *Dunaj je mesto*, ktorá je významom vety „Dunaj je mesto“, propozičnou premennou q, môžeme po zohľadnení významu logického operátora implikácie (implikátora) a parametrov možných svetov a časov, v ktorých tieto propozície vyhodnocujeme, vyjadriť hyperintenzionálnu formu úsudku (U1) takto:

$$(\text{U1*}) \qquad \frac{\begin{array}{l}\lambda w\, \lambda t\, [{}^0\!\rightarrow p_{wt}\ q_{wt}] \\ \lambda w\, \lambda t\, [p_{wt}]\end{array}}{\lambda w\, \lambda t\, [q_{wt}]}$$

Je zjavné, že úsudok formy (U1*) je platný, teda aj úsudok (U1) je platný; no v aktuálnom svete a čase sú propozície označené vetami „Bratislava je rieka“, resp. „Dunaj je mesto“ nepravdivé (a teda výsledná konštrukcia v prvej premise úsudku (U1) je pravdivá). Ak teda dosadíme do pravidlovej schémy (MP) za p, q propozičné konštrukcie *Bratislava je rieka*, resp. *Dunaj je mesto*, zisťujeme, že pri valuácii, ktorá premenným w, t priradí náš aktuálny svet a chronológiu doterajších okamihov, nemôžeme odvodiť pravdivosť záveru, pretože zhoda v druhej premise nie je spĺňaná.

Čo teda pravidlá (MP) – (OE) zachytávajú? Domnievame sa, že zachytávajú najmä tieto tri aspekty: 1. Tieto pravidlá umožňujú zachytiť rozdiel medzi platnosťou úsudkov (inferencií) a aktuálnou pravdivosťou ich premís. 2. Tieto pravidlá umožňujú vyjadriť aj tie Tichého logické intuície, podľa ktorých pri logickej inferencií, resp. pri dôkazoch – obzvlášť v takej disciplíne, akou je matematika, o ktorú sa Frege, Gentzen i Tichý pri svojich úvahách o dedukcii opierali – pracujeme s pravdami; a napokon: 3. tieto pravidlá umožňujú, aby do inferencií vstupovali aj konštrukcie empirických propozícií, vyjadrujúcich náhodné pravdy.

Dlžíme ešte jednu odpoveď, ktorá sa týka otázky, v akom vzťahu sú pravidlá β-redukcie, α-redukcie, či η-redukcie, ktoré (nielen) TIL využíva, k nami prezentovanej explikácii (fragmentu) pravidiel prirodzenej dedukcie? V prvom rade TIL je systém konštrukcií operujúcich nad objektmi z určitej epistemickej bázy a nad funkciami generovanými z týchto objektov. Môžeme teda zjednodušene konštatovať, že TIL operuje nad funkciami istých typov. Pri analýze výrazov prirodzeného jazyka sa TIL pokúša identifikovať v prípade empirických výrokov konštrukcie, ktoré v-konštruujú propozície, a v prípade analytických (neempirických) výrokov zasa konštrukcie, ktoré v-konštruujú pravdivostné hodnoty. Uvedené pravidlá β-redukcie, α-redukcie, či η-redukcie tak špecifikujú, ktoré prechody od konštruovania určitých funkcií, resp. aplikácií funkcií na argumenty príslušného typu, sú prípustné. Pokiaľ však chceme zostúpiť v prípade propozícií k dedukcii pravdivostnej závislosti určitej propozície od množiny iných propozícií, musíme aplikovať (kompozíciou) tieto propozície na hodnoty premenných w, t, aby sme dostali pravdivostné hodnoty, ktoré sú argumentmi unárnych a binárnych logických spojok. A práve v tejto rovine pracujeme s deduktívnymi pravidlami, ktoré sme sa tu pokúsili načrtnúť.

Literatúra

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. – MATERNA, P. (2011): *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic.* Springer.

DUŽÍ, M. – MATERNA, P. (2012): *TIL jako procedurální logika*. Bratislava: aleph.

GAHÉR, F. (2003): *Logika pre každého*. 3. vyd. Bratislava: Iris.

GAHÉR, F. – BIELIK, L. (2013): Prečo len nutné pravdy ako predpoklady úsudkov? *Organon F* 20, mimoriadne číslo 2, 75-97.

MATERNA, P. – ŠTĚPÁN, J. (2003): *Filozofická logika: nová cesta?* Olomouc.

ODDIE, G. – TICHÝ, P. (2004/[1982]): The Logic of Ability, Freedom and Responsibility. In: Svoboda, V. – Jespersen, B. – Cheyne, C. (eds.): *Pavel Tichý´s Collected Papers in Logic and Philosophy*. Praha: Filosofia – Dunedin: University of Otago Press, 483-504.

RACLAVSKÝ, J. (2009): *Jména a deskripce: logicko-sémantická zkoumání.* Olomouc: Nakladatelství Olomouc.

RACLAVSKÝ, J. (2012): Je Tichého logika logikou? (O vztahu logické analýzy a dedukce) *Filosofický časopis* 60, č. 2, 245-254.

RACLAVSKÝ, J. – KUCHYŇKA, P. (2011): Conceptual and Derivation Systems. *Logic and Logical Philosophy* 20, 159-174.

TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic.* Berlin – New York: de Gruyter.

TICHÝ, P. (2004/[1982]): Foundations of Partial Type Theory. In: Svoboda, V. – Jespersen, B. – Cheyne, C. (eds.): *Pavel Tichý´s Collected Papers in Logic and Philosophy*. Praha: Filosofia – Dunedin: University of Otago Press, 467-480.

TICHÝ, P. (2004/[1986]): Indiscernibility of Identicals. In: Svoboda, V. – Jespersen, B. – Cheyne, C. (eds.): *Pavel Tichý´s Collected Papers in Logic and Philosophy*. Praha: Filosofia – Dunedin: University of Otago Press, 649-671.

TICHÝ, P. – TICHÝ, J. (2004/[1999]): On Inference. In: Svoboda, V. – Jespersen, B. – Cheyne, C. (eds.): *Pavel Tichý´s Collected Papers in Logic and Philosophy*. Praha: Filosofia – Dunedin: University of Otago Press, 889-901.

ZOUHAR, M. (2008): *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory.* Bratislava: Veda.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 112-116

Expresivita logické analýzy přirozeného jazyka

PAVEL MATERNA

Oddělení logiky. Filosofický ústav Akademie věd České republiky, v.v.i.
Jilská 1. 110 00 Praha 1. Česká republika
MaternaPavel@seznam.cz

ZASLÁN: 05-11-2012 ▪ AKCEPTOVÁN: 08-04-2013

Abstract: The concept of *expressivity* of a theory or a system´(for example a system of concepts or – derivatively – of basic expressions) is surely important: a theory (system) is the more expressive the more *problems* it allows to be solved. We will try to formulate or at least to suggest an *explication of this notion.* We will, of course, assume that an appropriate explication of the notion of *problem* has been given.

Keywords: Concept – construction – Leibniz – expressivity – problem – TIL.

1. Obecná definice expresivity

T_i nechť je teorie v daném jazyku L v čase *t*. Π_1, Π_2, ... nechť jsou množiny problémů řešitelných v teoriích T_1, T_2 , ... v čase *t*.

- T_1 *má stejnou expresivitu jako* T_2 iff $\Pi_1 = \Pi_2$
- T_1 *má nižší expresivitu než* T_2 iff $\Pi_1 \subset \Pi_2$
- T_1 *je expresívně nesrovnatelná s* T_2 iff $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$

(Předpokladem smysluplnosti definic je dobrá explikace pojmu *problém*. Ze své kuchyně mohu nabídnout stať Materna 2008, pokud jde o definici problému.)

Takto lze definovat *expresivitu teorie*. Nahradíme-li výraz „řešitelných“ výrazem „formulovatelných“, dostaneme *expresivitu jazyka*. Za *problém* pokládám v tomto textu procedurálně chápaný *pojem*, tj. v podstatě uzavřenou *konstrukci* ve smyslu TIL (viz Duží – Jespersen – Materna 2010, 2.2). V případě matematických problémů je pojem *řešitelnosti* ztotožněn s *algoritmickou* řešitelností (tj. funkce konstruovaná daným pojmem je částečně rekurzívní), v případě empirických pojmů/problémů je pojem řešitelnosti složitější.

Pokud jde o *problém Logické analýzy přirozeného jazyka* (LAPJ), lze řešitelnost chápat tak, že problém adekvátní analýzy výrazu přirozeného jazyka je *řešitelný v teorii* T_i, *pokud výsledek této analýzy v* T_i *nelze v jiné teorii* T_j *korigovat*.

2. Měřítka expresivity logické analýzy výrazů logických teorií

Zde záleží na tom, jak budeme chápat $\mathbf{T}_i$. Myslitelné volby:

- *Různé řády*: výroková logika, predikátová logika 1. řádu, predikátová logika 1. řádu s identitou, predikátová logika 2. řádu
- *Různé „směry"*: klasická logika, intuicionistické logika
- *Různé axiomatické (formální) systémy téže logiky či téhož směru*

Naše definice mohou ověřit fakt, že výroková logika i jazyk výrokové logiky je méně expresivní než predikátová logika 1. řádu.

Otázka: Lze ověřit, že (zda?) predikátová logika 1. řádu je méně expresivní než predikátová logika 2. řádu?

Problém je zde následující: Věta „Ke každé třídě existuje třída, která je její podtřídou" není v predikátové logice 1. řádu analyzovatelná, takže výraz

$$\forall P \exists Q\ (\forall x\ (P(x) \supset Q(x))$$

predikátové logiky 2. řádu je neanalyzovatelný v 1. řádu, tj. 2. řád je expresivnější než 1. řád, pokud jde o formulovatelnost problému. Jiná věc je, zda problémy formulovatelné v 2. řádu jsou řešitelné, což nelze tvrdit vzhledem k neúplnosti predikátové logiky 2. řádu.

3. Měřítka expresivity v Logické analýze přirozeného jazyka

Nechť $\mathbf{T}_i$ je některá z teorií významu Logické analýzy přirozeného jazyka. LAPJ předpokládá (měla by předpokládat) princip kompozicionality (PK) (viz např. Szabó 2005, 5):

Mějme E jako množinu výrazů (daného jazyka), m nechť je přiřazení významu, M buď množina významů, které jsou k dispozici, a F nechť je k-členná syntaktická operace na E. Pak m je *F-kompozicionální,* existuje-li k-členná parciální funkce G na M taková, že je-li definováno $F(e_1,...,e_k)$, pak $m(F(e_1,...,e_k)) = G(m(e_1),...,m(e_k))$.

Mějme tedy výraz *e* daného přirozeného jazyka, jehož gramatika určuje, že je složen ze (smysluplných) podvýrazů $e_1,\ldots,e_k$. Podle PK tedy komponenty konstrukce C, která je významem *výrazu e*, jsou významy výrazů $e_1,\ldots,e_k$. Mějme teorii **T**, pro kterou analýza C' výrazu *e* obsahuje významy podvýrazů $e'_1,\ldots,e'_m$ výrazu *e,* kde $m < k$. Řekneme, že výraz *e* nelze v **T** *dále zjemnit.*

Definice
Výraz *e* jazyka L je *analyzovatelný v* $\mathbf{T}_i$ iff význam *e* (= výsledek analýzy *e*) v $\mathbf{T}_i$ nelze dále zjemnit v $\mathbf{T}_i$.

$\mathbf{\Pi}_i$ nechť je množina výrazů **přirozeného jazyka L** analyzovatelných v teorii $\mathbf{T}_i$. Pak schémata definic v části **Obecná definice expresivity** lze aplikovat jako definice možných vztahů mezi $\mathbf{\Pi}_i$, $\mathbf{\Pi}_j$.

Nechť tedy $\mathbf{\Pi}_i$, $\mathbf{\Pi}_j$, ... jsou množiny problémů řešitelných v teoriích $\mathbf{T}_i$, $\mathbf{T}_j$ ... LAPJ, kde je vyznačeno novým indexem, zda jde o tyto množiny v rámci výrokové či predikátové logiky apod. Pak lze snadno dokázat

$$\mathbf{\Pi}_{i\ \textit{výroková logika}} \subset \mathbf{\Pi}_{j\ \textit{predikátová logika 1. řádu}},$$

Vzhledem k tomu, že podle **Definice** je *jazyk* výrokové logiky chudší než *jazyk* logiky predikátové a že problém je formulovatelný v určitém jazyce, můžeme tedy konstatovat, že *množina problémů řešitelných ve výrokové logice je vlastní podmnožinou problémů řešitelných v predikátové logice*.

Vskutku, výraz *Každý živočich je zkrotitelný* je ve výrokové logice analyzovatelný jako jednoduchá konstrukce, reprezentovaná např. jedním písmenem. Taková analýza neumožňuje zapojení do kategorického sylogismu na rozdíl od analýzy poskytované predikátovou logikou 1. řádu. A tedy

$\mathbf{T}_{\textit{výroková logika}}$ je méně expresívní než $\mathbf{T}_{\textit{predikátová logika 1. řádu}}$.

4. Montague a TIL

Nechť $\mathbf{T}_1$ je Montaguova teorie LAPJ známá např. z Montague (1974) nebo GAMUT (1991). Nechť $\mathbf{T}_2$ je Tichého LAPJ založená na Transparentní Intenzionální Logice známé např. z Tichého monografie nebo z knihy Duží – Jespersen – Materna (2010). Tvrzení, že

$\mathbf{T}_1$ je méně expresivní než $\mathbf{T}_2$

lze dokázat, jsou-li dokazatelná dvě tvrzení.

A) $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{Mont}} \subset \mathbf{\Pi}_{\mathrm{TIL}}$
B) $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{TIL}} \not\subset \mathbf{\Pi}_{\mathrm{Mont}}$

Tedy platí-li, že

> Každý výraz analyzovatelný v Montaguově LAPJ je analyzovatelný v Tichého LAPJ, ale ne každý výraz analyzovatelný v Tichého LAPJ je analyzovatelný v Montaguově LAPJ.

Důkaz tvrzení A) je v obecných rysech myslitelný, ale jeho provedení by mělo podobu zvláštního pojednání (připomínajícího důkaz, že rekurzívní vyčíslitelnost je Turingovská vyčíslitelnost – nebo naopak).

Naproti tomu důkaz tvrzení B) je jednoduchý. Příklad: Mějme věty

a) $2{+}3 = +\sqrt{25}$.
b) *Karel počítá 2 + 3.*

Montague nemá k dispozici *konstrukce* (*abstraktní procedury*) jakožto objekty *sui generis*. Bez nich ovšem věty typu b) (postojové) nelze analyzovat a stojíme před problémem, jak vysvětlit nepoužitelnost Leibnizova pravidla

$y = z,\ \Phi(\ldots y \ldots) \rightarrow \Phi(\ldots z \ldots),$

jehož aplikace by při pravdivosti premis vedla k nepravdivému závěru *Karel počítá* $+\sqrt{25}$. Montaguova analýza končí strukturou $a = b$, kdežto v TIL máme

$[{}^0{=}\ [{}^0{+}\ {}^0 2\ {}^0 3]\ [{}^0{+}\ \sqrt{\ }\ {}^0 25]],$

a spolu s analýzou b) dokážeme vysvětlit, proč nepravdivost závěru je v souladu jak Leibnizovým pravidlem, tak s oběma premisami.

Neformálně jde o to, že TIL umožňuje rozlišit, kdy konstrukce, která je významem výrazu, je užita, a kdy je zmíněna. V tvrzení a) je konstrukce $[^0+ {}^02\ {}^03]$, která je významem výrazu 2+3, *užita*: konstruuje číslo 5. V tvrzení b) nás nezajímá, co tato konstrukce konstruuje – zajímá nás tato konstrukce sama: Je *zmíněna* (ale zůstává *významem* výrazu 2+3). Leibnizovo pravidlo nelze uplatnit, protože neplatí $y = z$: v a) se rovnost týká toho, co daný význam konstruuje, a v b) se nemluví o tom, co daný význam konstruuje.

Literatura

GAMUT, L.T.F. (1991): *Logic, Language and Meaning*. Vol. II. Chicago, London.

MONTAGUE, R. (1974): *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*. R. Thomason (ed.). New Haven: Yale University Press.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. – MATERNA, P. (2010): *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic*. Springer.

MATERNA, P. (2008): The Notion of Problem, Intuitionism and Partiality. *Logic and Logical Philosophy* 17, No. 4, 287-303.

SZABÓ, Z. (2005): Compositionality. In: Zalta, E. (ed.): *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Retrievable from <*http://plato.stanford.edu/archives/spr2005/entries/compositionality*>

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 117-139

Odkud se berou axiomy logiky?

JAROSLAV PEREGRIN[1]

Oddělení logiky. Filosofický ústav Akademie věd České republiky, v.v.i.
Jilská 1. 110 00 Praha 1. Česká republika
jarda@peregrin.cz

ZASLÁN: 02-12-2012 ▪ AKCEPTOVÁN: 15-03-2013

Abstract: Systems of axioms for elementary logic we can find in textbooks are usually not very transparent; and the reader might well wonder how did precisely such a set of axioms come into being. In this paper we present a way of constituting one such non-transparent set of axioms, namely the one presented by E. Mendelson in his *Introduction to Mathematical Logic*, in a transparent way, with the aim of helping the reader to get an insight into the workings of the axioms.

Keywords: Axioms – logic – natural deduction – negation.

1. Jak – k čertu – Mendelson přišel zrovna na tyhle axiomy??

Když se v učebnicích logiky seznamujeme s nějakým logickým kalkulem (ať už je to běžná, standardní logika, nebo nějaký méně běžný kalkul), jsou nám obvykle předloženy jeho axiomy. Proč má daný kalkul právě takové, a ne jiné axiomy? Obvykle je dokázáno, že tyto axiomy odpovídají příslušné sémantice, to jest, že kalkul, založený na těchto axiomech, je *korektní a úplný*. (To je ovšem možné jenom v případě kalkulu, jehož jazyk má nějakou samostatnou sémantiku, jako ji třeba má klasická logika – v opačném případě, jako například v případě intuicionistické logiky, jsou

[1] Práce na tomto textu byla podpořena grantem GAČR č. 13-21076S „Základy logiky ve světle nových výsledků filosofie a vědy“.

axiomy odůvodňovány nějak jinak.) Důkazy korektnosti a úplnosti ovšem nebývají příliš přehledné a příliš hluboký vhled do povahy axiomů nám obvykle nezjednají.

Vezměme například systém axiomů klasické predikátové logiky, který předkládá ve svém úvodu do (matematické) logiky Mendelson (1964):

$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
$((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
$((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow B)) \rightarrow A))$
$\forall x\, A \rightarrow A[a/x]$, kde $A[a/x]$ značí formuli A se všemi výskyty x nahrazenými a
$\forall x\, (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$, jestliže A neobsahuje x

Odvozovacími pravidly jsou generalizace a *modus ponens*:

$A \,/\, \forall x A$
$A, (A \rightarrow B) \,/\, B$

Jak se k takovým axiomům dopracovat? Proč vypadají právě tak, jak vypadají?

V knize, kde jsou tyto axiomy prezentovány, je samozřejmě možné najít jisté vysvětlení – je tam totiž důkaz korektnosti a úplnosti tohoto kalkulu (vzhledem k běžné sémantice klasické logiky), a my můžeme stopovat, kde a jak se v tom důkazu tyto axiomy a pravidla vyskytují a tímto způsobem získat odpověď na otázku, proč potřebujeme právě je.

Tato odpověď se mi ale nezdá být úplně uspokojivá, a tak se v tomto článku pokusím ukázat jinou cestu, jak se k právě těmto axiomům můžeme dopracovat, cestu, která vede přes budování logického systému klasického predikátového počtu v malých, průhledných krůčcích.

V tomto článku budu předpokládat, že logika je primárně něco tak přízemního jako technika obhospodařování pravd, které získáváme nezávisle na ní. Představme si, že pracuji v reklamní agentuře a dostanu telefonní seznam, ve kterém jsou zaškrtána jména, na něž mám soustředit nějakou reklamní kampaň. Těch jmen je spousta a já hledám cesty, jak si jich co nejvíce zapamatovat; extrémně užitečný by pro mě byl nějaký algoritmus, který by mi dovolil je všechny vygenerovat. Takže přijdu-li například na to, že všechna ta jména jsou vymezitelná nějakým předpisem (odpusťte mi fantasknost takové představy), například „Vezmi znaky *Pe*, *Kla* nebo *A*, přidej k nim *b* nebo *r*, ...“, bude to pro mne velmi užitečné. A logika, jak na ni nahlížím tady, je obecná teorie takovéhoto „managementu“, nikoli ovšem jmen potenciálních zákazníků, ale našich poznatků, to jest výroků, které máme za pravdivé.

Z hlediska tohoto článku ovšem není příliš podstatné, jak moc toto velmi přízemní chápání logiky bereme vážně. (Já mám pocit, že na logiku *je* užitečnější se dívat takto, než v ní vidět třeba teorii nejobecnějších struktur světa nebo lidské mysli; ale zde není místo, kde bych mohl vysvětlovat proč.)

2. Jazyky a vyčleněné výroky

Zdá se mi, že spojka, která je z hlediska logiky naprosto průzračná, je konjunkce. Ta se chová prostě tak, že je odvoditelná z obou svých konjunktů a kterýkoli z těchto konjunktů je odvoditelný z ní. A protože víme, že klasickou logiku lze postavit na konjunkci a negaci, zdá se, že celý problém axiomatizace se může zkoncentrovat do problému, jak k průhledné axiomatizaci konjunkce přidat axiomatizaci negace. To mě vede k tomu, že začnu s těmito dvěma spojkami, takže k Mendelsonově axiomatizaci s implikací se budu propracovávat oklikou.

Uvažme velmi jednoduchý jazyk prvního řádu, jehož slovník je tvořen individuovými konstantami **Azor, Brok** a **Pašík** a unárními predikáty **pes, kůň** a **vepř**. Máme devět výroků:

pes(**Azor**), **pes**(**Brok**), **pes**(**Pašík**), **kůň**(**Azor**), **kůň**(**Brok**), **kůň**(**Pašík**), **vepř**(**Azor**), **vepř**(**Brok**), **vepř**(**Pašík**)

Předpokládejme, že tři z těchto devíti výroků jsou vyčleněné (to jest ‚pravdivé‘); konkrétně **pes**(**Azor**), **pes**(**Brok**), **vepř**(**Pašík**); ostatní jsou nevyčleněné. Vyčleněné výroky si můžeme prostě sepsat do seznamu, do kterého můžeme, kdykoli budeme postaveni před úkol rozhodnout o tom, zda je některý z výroků tohoto jazyka vyčleněný, jednoduše nahlédnout.

Představme si ale, že tento jazyk rozšíříme o spojku $\wedge$, která, jak bývá zvykem, reglementuje[2] českou spojku *a*. Výroků tedy teď už bude neomezený počet, a my už tak nemůžeme udělat jejich úplný seznam. Takový seznam ale jistě můžeme udělat nepřímo: můžeme zadat instrukci, jak ho – potenciálně – vygenerovat. Zjevně stačí, když k výše uvedenému seznamu

[2] Pojem reglementace používám ve smyslu, v jakém ho zavedli Svoboda - Peregrin (2009).

devíti elementárních výroků přidáme pravidlo, že kdykoli máme na seznamu vyčleněných výroků nějaké dva výroky, je tam třeba přidat i výrok, který vznikne jejich spojením pomocí $\wedge$.

Jak by měl nyní vypadat seznam všech *vyčleněných* výroků? Má-li spojka $\wedge$ fungovat, jak je běžné, podobně jako *a*, pak by měl asi vypadat tak, že by obsahoval výrok tvaru $A \wedge B$ právě tehdy, když by obsahoval i obě jeho součásti, A a B. Předpokládáme-li, že můžeme vyjít ze seznamu všech jednoduchých vyčleněných výroků, pak takový seznam všech vyčleněných výroků v tomto jazyce zřejmě můžeme vyrobit tak, že k němu budeme přidávat konjunkci každých dvou výroků, které na něm už jsou. Pravidlo pro takové přidávání zapíšeme následujícím způsobem:

($\wedge$I) $A, B \vdash (A \wedge B)$

Říkejme jazyku, ke kterému jsme se takto dopracovali, (J$\wedge$).

Jazyk (J$\wedge$)

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok; přičemž jmény jsou **Azor, Brok** a **Pašík**, a predikáty jsou **pes, kůň** a **vepř**.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. **pes**(**Azor**), **pes**(**Brok**), **vepř**(**Pašík**)
2. Jsou-li A a B vyčleněné, je vyčleněný i $(A \wedge B)$; zkráceně ($\wedge$I) $A, B \vdash (A \wedge B)$

Na vygenerování nějakého výroku pomocí pravidel generování seznamu vyčleněných výroků se ovšem také můžeme dívat jako na jeho *důkaz*. Vezměme například výrok (**vepř**(**Pašík**)$\wedge$**pes**(**Brok**))$\wedge$**vepř**(**Pašík**). Dokázat ho můžeme následujícím způsobem:

1. **vepř**(**Pašík**)	vyčleněný jednoduchý výrok
2. **pes**(**Brok**)	vyčleněný jednoduchý výrok
3. **vepř**(**Pašík**)$\wedge$**pes**(**Brok**)	z 1. a 2. pomocí ($\wedge$I)
4. (**vepř**(**Pašík**)$\wedge$**pes**(**Brok**))$\wedge$**vepř**(**Pašík**)	z 3. a 1. pomocí ($\wedge$I)

3. Co na seznamu být *nemá*

Pravidlo ($\wedge$I) nám zaručuje, že budeme-li vycházet ze seznamu všech vyčleněných jednoduchých výroků, budeme mít na seznamu i všechny konjunkce, které chceme vyčlenit. Abychom tam ovšem měli *jenom* je (a ne navíc také třeba nějaké z těch, které vyčlenit nechceme), musíme tento seznam generovat *pouze* pomocí pravidla ($\wedge$I). To znamená, že na seznam nesmíme přidávat ($A \wedge B$), aniž by tam už byly i A a B.

Abychom tohle vyjádřili zase pomocí pravidel, museli bychom do hry vzít pravidla pro to, co na seznam vyčleněných výroků *nepatří*. Taková pravidla se normálně v logice nevyskytují – zavést bychom je ovšem mohli. Mohli bychom například psát

($\wedge$E1*) $\quad A \dashv (A \wedge B)$
($\wedge$E2*) $\quad B \dashv (A \wedge B)$

a číst to *nepatří-li na seznam A* (resp. *B*), *pak tam nepatří ani* ($A \wedge B$). Alternativně bychom mohli uvažovat o generování – vedle seznamu vyčleněných výroků – i paralelního seznamu *nevyčleněných* výroků a vzít uvedená pravidla jako pravidla pro generování tohoto seznamu. (Výroky, které *patří* na seznam *nevyčleněných* výroků, jsou přitom samozřejmě ty, které *nepatří* na seznam *vyčleněných* výroků.)

Přidáme-li tato dvě pravidla k pravidlu ($\wedge$I), dostaneme už jednoznačné vymezení seznamu všech vyčleněných výroků jazyka (J$\wedge$)? Za předpokladu, že máme dán seznam všech vyčleněných *jednoduchých* výroků, pak zřejmě ano: pravidlo ($\wedge$I) nám zajistí, aby se na seznam vyčleněných výroků dostaly všechny výroky, které mají být vyčleněné, a pravidla ($\wedge$E1*) a ($\wedge$E2*) nám zajistí, aby se tam nedostaly žádné z těch, které vyčleněné být nemají.

Všimněme si dále, že řekneme-li, že nepatří-li na seznam A, pak tam nepatří ani ($A \wedge B$), je to v podstatě totéž, jako kdybychom řekli, že patří-li tam ($A \wedge B$), pak tam patří i A. Platí-li totiž to první, musí platit i to druhé a naopak. Takže pravidla ($\wedge$E1*) a ($\wedge$E2*) můžeme, jak se zdá, transformovat do podoby

($\wedge$E1) $\quad (A \wedge B) \vdash A$
($\wedge$E2) $\quad (A \wedge B) \vdash B$.

Pravidla ($\wedge$E1) a ($\wedge$E2) nám ale už opět říkají, co se na seznam *má* přidat – jak tedy mohou zajistit, aby se tam nepřidalo to, co se tam přidat *nemá*? Vtip je v tom, že pravidla ($\wedge$E1) a ($\wedge$E2) promítnou přidání jakékoli nepatřičné konjunkce dolů až na jednoduché výroky, a tak se nám jako výsledek přidání jakékoli nepatřičné konjunkce v seznamu objeví i některé jednoduché výroky, které tam nepatří. Takže jakákoli nepatřičnost kdekoli v seznamu se promítne do konfliktu s výchozím seznamem vyčleněných jednoduchých výroků.

4. Negace

Představme si nyní, že jazyk (J$\wedge$) rozšíříme o další způsob, jak činit z výroků složitější výroky – přidáme symbol $\neg$, který, jak je obvyklé, reglementuje zápor v přirozeném jazyce, takže výrok $\neg A$ má být vyčleněný právě tehdy, když výrok A vyčleněný není – jinými slovy výrok $\neg A$ patří na seznam vyčleněných výroků právě tehdy, když na něj nepatří A, a naopak.

Všimněme si, že pravidlo, které jsme právě stanovili, sice určuje, které negované výroky na seznam patří a které ne, ale *není* použitelné pro *generování* tohoto seznamu. To je situace dramaticky odlišná od té, kterou jsme měli v případě $\wedge$: tam nám pravidlo ($\wedge$I) (případně spolu s pravidly ($\wedge$E1) a ($\wedge$E2)) jak vymezovalo, co na tento seznam patří, tak tento seznam generovalo. Otázkou tedy nyní je, zda můžeme dostat pravidla, která by nám generovala seznam všech vyčleněných výroků i v jazyce s negací – říkejme mu (J$\wedge\neg$).

Výše diskutované pravidlo (a říkejme mu raději *princip*, abychom zdůraznili, že nejde o pravidlo generativní), můžeme rozdělit do dvou částí:

($\neg$1) Je-li na seznamu A, nepatří tam $\neg A$.
($\neg$2) Jestliže na seznamu není a nikdy nebude A, patří tam $\neg A$.

Je nyní možné, tak jako v případě konjunkce, obecně říci o výroku, který obsahuje třeba více než jednu negaci, zda je nebo není vyčleněný? Pokud neobsahuje konjunkci, pak může být jedině tvaru $\neg...\neg A$ a na seznam patří právě tehdy, když je těch negací lichý počet a A není vyčleněný, nebo je negací počet sudý a A vyčleněný je. Jak to ale bude s výroky, které obsahují jak negace, tak konjunkce? Ani v tomto případě není rozhodnutí těžké. Víme-li, které jednoduché výroky jsou vyčleněné, víme tím, které jejich konjunkce a negace jsou vyčleněné, a tedy které konjunkce a negace těchto konjunkcí a negacíjsou vyčleněné atd.

Tak například máme-li výrok (**vepř**(**Pašík**) $\wedge$ $\neg$(**vepř**(**Pašík**) $\wedge$ $\neg$($\neg$**pes**(**Pašík**) $\wedge$ **vepř**(**Brok**)))), pak to, zda je vyčleněný, snadno zjistíme následujícím způsobem. Výrok **pes**(**Pašík**) vyčleněný není, tudíž výrok

¬**pes**(**Pašík**) vyčleněný je. Protože výrok **vepř**(**Brok**) vyčleněný není, není vyčleněná konjunkce (¬**pes**(**Pašík**) ∧ **vepř**(**Brok**)), a tudíž je vyčleněná její negace ¬(¬**pes**(**Pašík**) ∧ **vepř**(**Brok**)). Výrok **vepř**(**Pašík**) je také vyčleněný, takže je vyčleněná celá konjunkce (**vepř**(**Pašík**) ∧ ¬(¬**pes**(**Pašík**) ∧ **vepř**(**Brok**))), a tudíž není vyčleněná její negace ¬(**vepř**(**Pašík**) ∧ ¬(¬**pes**(**Pašík**) ∧ **vepř**(**Brok**))). Takže ač výrok **vepř**(**Pašík**) je vyčleněný, jeho konjunkce s touto nevyčleněnou negací, která tvoří celý zkoumaný výrok, vyčleněná není.

Principy (¬1) a (¬2) skutečně nejsou generativní pravidla, tj. nepodávají nám žádný přímý návod, jak konstruovat seznam vyčleněných výroků. (¬1) nám pouze říká, jak seznam *ne*rozšiřovat, zatímco (¬2) nám sice říká, co na něj přidat, ale za okolností, u kterých není úplně jasné, zda je můžeme vůbec někdy s jistotou rozpoznat. Jak můžeme vědět, že *A* na seznamu *nikdy nebude*?

Zaveďme opět trochu terminologie. Seznam, na kterém není žádný výrok spolu se svou negací, tedy není tam žádné *A* spolu s ¬*A*, budeme nazývat *konzistentní*, v opačném případě mu budeme říkat *nekonzistentní*. Seznam, který obsahuje negaci každého výroku, který neobsahuje (tedy obsahuje ¬*A*, vždy když neobsahuje *A*) budeme nazývat (*syntakticky*) *úplný*. (Budeme také někdy říkat, že seznam je konzistentní resp. úplný s ohledem na nějaký druh výroků, například s ohledem na jednoduché výroky, obsahuje-li nejvýše resp. alespoň jeden z dvojice *A* a ¬*A* pro každý výrok *A* tohoto druhu.) Můžeme tedy říci, že naším konečným cílem z hlediska negace je konzistentní a syntakticky úplný seznam. To ale stále ještě nemáme předpis pro generování takového seznamu. Lze se k němu dopracovat?

Jednou z cest, jak můžeme postupovat, je ta, že se na negaci budeme dívat jako na prostředek generování seznamu *ne*vyčleněných výroků, o jakém jsme uvažovali výše: můžeme si představit, že přítomnost ¬*A* na tomto seznamu značí, že *A* *ne*patří mezi vyčleněné výroky. Předpokládáme, že jednoduché výroky na vyčleněné a nevyčleněné rozdělené máme, to jest seznam všech vyčleněných jednoduchých výroků bereme za dané východisko. Přidejme tedy do tohoto výchozího seznamu i negace všech nevyčleněných jednoduchých výroků. Tak bude seznam obsahovat pro každý jednoduchý výrok buďto jej, nebo jeho negaci (tj. bude *úplný* s ohledem na své *jednoduché* výroky). Teď jde o to ho rozšířit na všechny výroky jazyka.

Budeme postupovat indukcí. Mějme výrok *V* a předpokládejme, že pro všechny jednodušší výroky už platí, že je-li výrok vyčleněný, je na seznamu on sám, a není-li vyčleněný, je tam jeho negace. Chceme zajistit, aby totéž pak platilo i pro *V*: to pak zjevně povede k výsledku, že to bude platit pro všechny výroky.

Je-li V složený, může být tvaru $(A \wedge B)$ nebo $\neg A$. Vezměme nejprve první z těchto případů. Pravidlo ($\wedge$I) nám říká, že tento výrok je na seznamu tehdy, když na něm jsou A i B; a jenom v tom případě. To znamená, že jestliže na něm A nebo B chybí, nepatří na něj ani $A \wedge B$. Ale předpokládáme-li, že náš seznam už je úplný pro všechny výroky jednodušší než $A \wedge B$, pak na něm v takovém případě bude $\neg A$ nebo $\neg B$. Takže když přidáme pravidla

($\neg\wedge$I1) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ a
($\neg\wedge$I2) $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$,

budeme vědět, že budeme mít na výsledném seznamu negace všech těch konjunkcí, které na tomto seznamu nebudou.

Zbývá nám druhá možnost, totiž že V je $\neg A$. Víme, že je-li A vyčleněný, je na seznamu on sám, a není-li vyčleněný, je tam $\neg A$. Víme tedy, že je-li $\neg A$ vyčleněný, je na seznamu. Co když ale $\neg A$ vyčleněný není? V takovém případě víme, že je na seznamu A, ale potřebovali bychom, aby tam byl i $\neg\neg A$. To zřejmě zajistíme přidáním pravidla

($\neg\neg$I) $A \vdash \neg\neg A$.

Uvedená pravidla nám tedy dovolí rozšířit každý konzistentní a úplný seznam jednoduchých vyčleněných výroků na konzistentní a úplný seznam všech vyčleněných výroků.

Máme tedy nyní následující formulaci jazyka (J$\wedge\neg$):

Jazyk (J$\wedge\neg$):

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok; přičemž jmény jsou **Azor, Brok** a **Pašík**, a predikáty jsou **pes, kůň** a **vepř**.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. **pes**(**Azor**), **pes**(**Brok**), **vepř**(**Pašík**), $\neg$**pes**(**Pašík**), $\neg$**vepř**(**Azor**), $\neg$**vepř**(**Brok**), $\neg$**kůň**(**Azor**), $\neg$**kůň**(**Brok**), $\neg$**kůň**(**Pašík**)

2. ($\wedge$I) A, $B \vdash (A \wedge B)$
3. ($\neg\wedge$I1) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
4. ($\neg\wedge$I2) $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
5. ($\neg\neg$I) $A \vdash \neg\neg A$.

5. Logika

Logika se nezajímá o žádný konkrétní jazyk; zajímá se o zákonitosti, které platí pro *každý* jazyk nějakého druhu, například pro každý jazyk s operátory $\wedge$ a $\neg$ řídícími se výše uvedenými pravidly (bez ohledu na to, jakým dalším výrazivem disponují). Můžeme například zkoumat, existuje-li nějaký druh výroků, který by vždy patřil na seznam vyčleněných výroků v kterémkoli takovém jazyce. Je zřejmé, že v jazyce typu (J$\wedge$) takový druh nenajdeme: zřejmě totiž neexistuje vůbec žádný výrok, který by byl na každém takovém seznamu, natož pak druh výroků. (Neexistuje totiž žádný jednoduchý výrok, který by musel být na každém takovém seznamu, a vzhledem k tomu, že výrok tvaru $A \wedge B$ by se dostal na každý seznam jenom tehdy, kdyby tam již byly A a B, nebude ani žádný takový výrok na každém seznamu.)

Vezmeme-li ale jazyk typu (J$\wedge\neg$), situace se mění. Tak například každý výrok tvaru $\neg(A \wedge \neg A)$ nutně patří na seznam vyčleněných výroků každého jazyka takového typu. To plyne z následující úvahy. Podle ($\neg$1) nepatří na žádný takový seznam A současně s $\neg A$. To znamená, že tam nepatří ani $A \wedge \neg A$. (Patří tam jedině konjunkce vygenerované pravidlem ($\wedge$I), a toto pravidlo nám $A \wedge \neg A$ vygenerovat nemůže.) Ale nepatří-li na seznam $A \wedge \neg A$, pak tam podle pravidla ($\neg$2) patří $\neg(A \wedge \neg A)$.

Jsme schopni jakýkoli výrok tvaru $\neg(A \wedge \neg A)$ v rámci jazyka (J$\wedge\neg$) dokázat (to jest vygenerovat ho v rámci seznamu vyčleněných výroků, bez ohledu na to, co je A za výrok)? Odpověď na tuto otázku je pozitivní. Podle předpokladu můžeme pro každý výrok A dokázat buďto jej, nebo jeho negaci. Předpokládejme tedy, že je dokazatelný A. Pak je pomocí ($\neg\neg$I) dokazatelný i $\neg\neg A$, a $\neg(A \wedge \neg A)$ je pak dokazatelný pomocí ($\neg\wedge$I2). Není-li naopak dokazatelný A, ale $\neg A$, je $\neg(A \wedge \neg A)$ dokazatelný přímo pomocí ($\neg\wedge$I1).

Můžeme ale $\neg(A \wedge \neg A)$ dokázat *obecně*, to jest aniž bychom mohli předpokládat, že je dokazatelný A, či že je dokazatelný $\neg A$? To je zřejmě problém. Jediná dvě pravidla, která nás mohou vést k závěru tvaru $\neg(A \wedge \neg A)$, jsou ($\neg\wedge$I1) a ($\neg\wedge$I1), a nemáme-li k dispozici ani A, ani $\neg A$, je tento závěr nedosažitelný. Zjevně bychom tedy potřebovali nějaká pravidla pro generování seznamu, která by odpovídala principům ($\wedge$1) a ($\wedge$2). Lze o nějakých takových pravidlech uvažovat?

Pokud jde o ($\neg$1), zdá se, že v podstatě jediný způsob, jak se můžeme tomuto principu alespoň trochu přiblížit, je pravidlo

($\neg$1*) $A, \neg A \vdash B$

Toto pravidlo říká, že je-li na seznamu nějaký výrok spolu se svou negací, pak tam může být už cokoli. To se zdá být jenom slabý odvar z principu ($\neg$1): zřejmě nám *nezabrání* přidat na seznam A i $\neg A$, pouze způsobí, že v takovém případě se seznam rozroste už o úplně všechno. (Budeme mít tedy už jenom jedinou nekonzistentní teorii, totiž teorii obsahující vůbec všechny výroky.)

Principu ($\neg$2) se zase pomocí odvozovacích pravidel dokážeme neuměle přiblížit tak, že formulujeme jakési „metapravidlo", to jest pravidlo, které nám ze dvou odvozovacích pravidel vygeneruje nové odvozovací pravidlo

($\neg$2*) jestliže $X,A \vdash B$ a $X,\neg A \vdash B$, pak $X \vdash B$

Všimněme si, že máme-li ($\neg$1*) a ($\neg$2*), můžeme už dokázat $\neg(A \wedge \neg A)$ obecně – tedy dokázat, že je $\neg(A \wedge \neg A)$ odvoditelný z prázdné množiny předpokladů. K tomu nám, vzhledem k ($\neg$2*), zřejmě stačí dokázat, že $\neg(A \wedge \neg A)$ je odvoditelný jak z $(A \wedge \neg A)$, tak z $\neg(A \wedge \neg A)$. Protože to druhé je triviální, stačí dokázat to první:

1.	$(A \wedge \neg A)$	předpoklad
2.	$\neg A$	z 1. pomocí (E$\wedge$2)
3.	$\neg(A \wedge \neg A)$	z 2. pomocí ($\neg\wedge$I1)

Navíc lze ukázat, že pravidla, která jsme dosud formulovali, nám už dovolují *dokázat* všechny výroky, které patří na seznam vyčleněných výroků.

Jako vedlejší produkt těchto úvah jsme dostali i rozšířenou formulaci jazyka (J$\wedge\neg$):

Jazyk (J$\wedge\neg$):

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok; přičemž jmény jsou **Azor, Brok** a **Pašík**, a predikáty jsou **pes, kůň** a **vepř**.

2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. **pes(Azor)**, **pes(Brok)**, **vepř(Pašík)**, ¬**pes(Pašík)**, ¬**vepř(Azor)**, ¬**vepř(Brok)**, ¬**kůň(Azor)**, ¬**kůň(Brok)**, ¬**kůň(Pašík)**
2. $(\wedge\mathrm{I})\ A, B \vdash (A \wedge B)$
3. $(\neg\wedge\mathrm{I}1)\ \neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
4. $(\neg\wedge\mathrm{I}2)\ \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
5. $(\neg\neg\mathrm{I})\ A \vdash \neg\neg A$
6. $(\neg 1^*)\ A, \neg A \vdash B$
7. $(\neg 2^*)$ jestliže $X,A \vdash B$ a $X,\neg A \vdash B$, pak $X \vdash B$

6. Formální jazyk

Zabýváme-li se logikou, můžeme se namísto konkrétního jazyka zabývat jenom jazykovou formou, která bude ztělesňovat to, co je společné všem relevantním jazykům. Takovou formu dostaneme, když v jazyce, který máme, nahradíme konkrétní výrazivo, s výjimkou toho logického, ‚prázdnými' symboly – parametry. Takže namísto jmen **Azor, Brok** a **Pašík** a predikátů **pes**, **kůň** a **vepř** budeme mít například parametry a, b, c, ... a P, Q, R, ... Žádný z ‚výroků' (kterým je již teď lépe říkat *formule*) takovéhoto formálního jazyka nebude vyčleněný; a seznam jeho vyčleněných formulí pak bude sestávat z těch, které budou udávat tvary výroků vyčleněných v jakémkoli jazyce. (Prokážeme-li totiž, že je nějaká formule v tomto jazyce vyčleněná, pak můžeme zcela analogicky prokázat, že je ve svém jazyce vyčleněná jakákoli formule tohoto tvaru.) Navíc obráceně všechny formule vyčleněné v každém jazyce budou vyčleněny i v tomto jazyce (což plyne prostě z toho, že i on sám je jazykem příslušného tvaru).

Takovémuto formálnímu jazyku můžeme také říkat *logika*; a každému konkrétnímu jazyku této formy pak můžeme říkat *jazyk v rámci této logiky*. To, co jsme právě konstatovali, pak můžeme vyjádřit tak, že výroky nějakého tvaru budou vyčleněny v každém jazyce v rámci naší logiky *právě tehdy*, když bude tento tvar vyčleněnou formulí této logiky.

	Logika (L∧¬)	Jazyk (J∧¬)
Jména:	neurčena (v případě nutnosti používáme generické symboly a, b, c, ...)	**Azor, Brok, Pašík**
Predikáty:	neurčeny (v případě nutnosti používáme generické symboly P, Q, R, ...)	**pes, kůň, vepř**
Jednoduché výroky:	neurčeny (v případě nutnosti používáme symboly $P(a)$, $Q(a)$, $P(b)$, ... nebo A, B, C	jakýkoli predikát následovaný jakýmkoli uzávorkovaným jménem, např. **pes**(**Azor**), **pes**(**Brok**), **vepř**(**Azor**), ...
Složené výroky:	jakékoli dva výroky spojené ∧; jakýkoli výrok s předřazeným ¬	
Vyčleněné jednoduché výroky:	-	**pes**(**Azor**), **pes**(**Brok**), **vepř**(**Brok**)
Vyčleněné složené výroky:	(∧I) A, $B \vdash (A \wedge B)$ (¬∧I1) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ (¬∧I2) $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ (¬¬I) $A \vdash \neg\neg A$ (¬1*) $A, \neg A \vdash B$ (¬2*) jestliže $X,A \vdash B$ a $X,\neg A \vdash B$, pak $X \vdash B$	

Můžeme se nyní, analogicky jako jsme v konkrétních jazycích tvořili seznamy jejich vyčleněných výroků, pokusit v rámci formálního jazyka vytvořit seznam výroků, které budou vyčleněné ve všech jazycích příslušné formy. Jinými slovy to budou výroky, které budou vyčleněné, aniž bychom cokoli předpokládali o mimo-logickém výrazivu jazyka – o tom, kolik má jmen či predikátů, ani o tom, které jeho jednoduché výroky jsou vyčleněné.

7. Přirozená dedukce

Problém, na který narážíme s naší dosavadní charakterizací vyčleněných výroků v rámci jazyka (L∧¬), je ten, že obsahuje ‚metapravidlo' (¬2*). To, nám, jak jsme viděli, neslouží k vyvozování výroků z výroků, ale pracuje „o úroveň výš“: slouží k odvozování pravidel z pravidel. V (hilbertovském) axiomatickém systému, s jakým pracuje Mendelson a k jakému bychom tedy měli směřovat my, ovšem není pro taková pravidla místo – jak bychom se ho tedy mohli zbavit? Provedeme to tak, že dočasně uhneme z cesty směřující k hilbertovské axiomatizaci a pokusíme se vybudovat systém gentzenovské přirozené dedukce; na tu původní cestu se pak vrátíme až tehdy, když zavedeme implikaci.[3]

Přesun k přirozené dedukci uskutečníme tak, že se namísto seznamu vyčleněných výroků budeme snažit vybudovat seznam vyčleněných *sekventů*, kde sekvent je, neformálně řečeno, zachycení kroku od určitých premis k určitému závěru: Je-li X seznam výroků a A výrok, je $X \vdash A$ (*jednoduchý*) *sekvent*.[4] A tak jak jsme se dosud snažili vybudovat seznam vyčleněných výroků (který měl odpovídat seznamu pravdivých vět) se nyní můžeme pokusit vybudovat seznam vyčleněných sekventů (které by měly odpovídat případům správných odvození).

Jaký bude vztah mezi vyčleněnými výroky a vyčleněnými sekventy? A patří na seznam logicky vyčleněných výroků právě tehdy, když patří na seznam vyčleněných výroků jakéhokoli jazyka v rámci příslušné logiky; a $X \vdash A$ bude patřit mezi logicky vyčleněné sekventy právě tehdy, když každý seznam vyčleněných výroků, který obsahuje všechny prvky X, obsahuje i A. Z toho je jasné, že výrok A je logicky vyčleněný právě tehdy, když je logicky vyčleněný sekvent $\vdash A$ (s prázdným seznamem předpokladů). A chceme-li „přeložit“ naše dosavadní vymezení naší logiky do nové podoby, ve které půjde o seznam nikoli vyčleněných výroků, ale o seznam vyčleněných sekventů, nemusíme, zdá se, dělat vlastně nic, protože návod na vybudování seznamu vyčleněných výroků můžeme rovnou číst jako návod na budování seznamu vyčleněných sekventů – (∧I), (¬∧I1), (¬∧I2), (¬¬I) a (¬1*) stanovují výcho-

---

[3] Podrobněji o hilbertovských a gentzenovských systémech viz dodatky ve Svoboda – Peregrin (2009).

[4] Gentzen (1934, 1936), který tento termín zavádí, připouští sekventy, které mají napravo od $\vdash$ nejenom jediný výrok, ale stejně tak jako nalevo celý seznam. My se omezujeme na jednodušší variantu, která odpovídá přirozené dedukci.

zí typy sekventů, které jsou na seznamu, a (¬2*) určuje, jak tento seznam rozšiřovat.

To, že to je takto jednoduché, je ale jenom zdání. Tato pravidla nás nepovedou k takovému seznamu sekventů, jaký chceme; to jest k takovému, na kterém budou všechny sekventy odpovídající pravidlům, která platí v jakýchkoli jazycích v rámci naší logiky. Vezměme například platný sekvent A, $B \vdash (A \wedge B)$. Ten na seznamu bude (díky axiomu ($\wedge$I)). Ale co třeba sekvent A, B, $C \vdash (A \wedge B)$? Ten je jistě také platný: stačí-li k přítomnosti výroku $(A \wedge B)$ na seznamu vyčleněných výroků přítomnost výroků A a B, pak tím spíše k tomu stačí přítomnost A, B a C. Nicméně sekvent A, B, $C \vdash (A \wedge B)$ z ($\wedge$I), ($\neg\wedge$I1), ($\neg\wedge$I2), ($\neg\neg$I) a ($\neg$1*) pomocí ($\neg$2*) nedostaneme.

Ukazuje se tedy, že potřebujeme další odvozovací pravidla; v našem konkrétním případě pravidlo

(E) jestliže $X,Y \vdash A$, pak $X,B,Y \vdash A$

Toto pravidlo je v jistém smyslu triviální: netýká se žádných specifických logických operátorů, jenom nám říká, že rozšiřujeme-li u platného sekventu seznam předpokladů, jeho platnost tím nijak neohrozíme. Podobně neohrozíme platnost sekventu ani tehdy, když mezi jeho předpoklady vyškrtáme duplicity či když jeho předpoklady nějak přeházíme; což nám říkají následující metapravidla:[5]

(C) jestliže $X,A,A,Y \vdash B$, pak $X,A,Y \vdash B$
(P) jestliže $X,A,B,Y \vdash C$, pak $X,B,A,Y \vdash C$

Pak musíme zachytit fakt, že odvození, která jsou zachycována sekventy, se mohou „skládat“: dokážu-li z předpokladů X závěr A a potřebuji-li A, spolu s nějakými dalšími předpoklady Y, k důkazu závěru B, pak B zřejmě dokážu z předpokladů X a Y.

(T) platí-li $X,A,Y \vdash B$ a $Z \vdash A$, platí i $X,Z,Y \vdash B$

Nakonec musím, jak se ukazuje, přidat ještě jeden (triviální) axiom

(I) $X,A,Y \vdash A$

[5] Předpokládáme, že X je seznam výroků (u kterého může hrát roli pořadí a ve kterém se některé výroky mohou vyskytovat opakovaně). Kdybychom jej brali jako množinu, byla by tato dvě pravidla nadbytečná.

Doplníme-li naše nové vymezení naší logiky tímto způsobem, dostaneme, jak se dá ukázat, vymezení, které je úplné.

Jazyk (L$\wedge\neg$):

Výroky:

1. A, B, C, ...
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Sekventy:

1. Je-li X (konečná) posloupnost výroků a je-li A výrok, je $X \vdash A$ sekvent.

Vyčleněné sekventy:

1. (I) $X, A \vdash A$
2. ($\wedge$I) $A, B \vdash (A \wedge B)$
3. ($\neg\wedge$I1) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
4. ($\neg\ \wedge$I2) $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
5. ($\neg\neg$I) $A \vdash \neg\neg A$
6. ($\neg$1*) $A, \neg A \vdash B$
7. ($\neg$2*) $X, A \vdash B; X, \neg A \vdash B / X \vdash B$
8. (E) $X \vdash A / X, B \vdash A$
9. (C) $X, A, A \vdash B / X, A \vdash B$
10. (P) $X, A, B \vdash C / X, B, A \vdash C$
11. (T) $X, A \vdash B; Y \vdash A / X, Y \vdash B$

8. Klasická výroková logika

Vymezení jazyka (L$\wedge\neg$), jak jsme se k němu právě dopracovali, fakticky odpovídá *klasické výrokové logice*; zatím ale ještě v podobě, která je poněkud příliš složitá. Pokusme se tedy tento systém zjednodušit.

Zaprvé, všimněme si, že pravidlo ($\neg\neg$I) je odvoditelné z ostatních:

1. $A, \neg\neg A \vdash \neg\neg A$ (I)
2. $A, \neg A \vdash \neg\neg A$ ($\neg$1*)
3. $A \vdash \neg\neg A$ z 1. a 2. podle ($\neg$2*)

To jest toto pravidlo můžeme z našeho systému bez náhrady vyškrtnout.

Dále odvodíme jedno pomocné pravidlo, konkrétně

($\neg$3*) $X, A \vdash B \,/\, X, \neg B \vdash \neg A$:

1. $X, A \vdash B$ předpoklad
2. $B, \neg B \vdash \neg A$ ($\neg$1*)
3. $X, A, \neg B \vdash \neg A$ z 1. a 2. pomocí (T)
4. $X, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ (I)
5. $X, \neg B \vdash \neg A$ z 3. a 4. pomocí ($\neg$2*)

Toto pravidlo nám nyní dovoluje nahradit axiomy $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ a $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ axiomy (E$\wedge$1) a (E$\wedge$2), tj.

($\wedge$E1) $(A \wedge B) \vdash A$
($\wedge$E2) $(A \wedge B) \vdash B$.

Další pomocné pravidlo, které dokážeme, je

($\neg$4*) $\neg\neg A \vdash A$:

1. $\neg\neg A, \neg A \vdash A$ ($\neg$1*)
2. $\neg\neg A, A \vdash A$ (I)
3. $\neg\neg A \vdash A$ z 1. a 2. pomocí ($\neg$2*)

Vraťme se k našemu důkazu, že toho, že $\neg(A \wedge \neg A)$ patří na každý seznam – nyní ho můžeme pojmout jako důkaz pravidla $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$:

1. $A, \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ ($\neg$1*)
2. $(A \wedge \neg A) \vdash A$ (E$\wedge$1)
3. $(A \wedge \neg A), \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 1. a 2. pomocí (T)
4. $(A \wedge \neg A) \vdash \neg A$ (E$\wedge$2)
5. $(A \wedge \neg A), (A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 3. a 4. pomocí (T)
6. $(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 5. pomocí (C)
7. $\neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ (I)
8. $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 6. a 7. pomocí ($\neg$2*)

9. Implikace

Samozřejmě můžeme uvažovat o jazycích, které mají jiné „logické spojky“ než $\wedge$ a $\neg$. Některé můžeme také vyrobit z těch, které již máme. Zaveďme například standardním způsobem implikaci:

$$(A \to B) \equiv_{\text{Def.}} \neg(A \wedge \neg B)$$

Lze snadno ukázat, že pro takto zavedenou implikaci platí, co by pro ni platit mělo, to jest

(→E) $A, (A \to B) \vdash B$
(→I) $X, A \vdash B \,/\, X \vdash (A \to B)$

To mimo jiné znamená, že $X,A \vdash B$ je pravidlem právě tehdy, když je pravidlem $X \vdash (A \to B)$ (to je dobře známá *věta o dedukci*).

Nás ale více zajímá případ, kdy vezmeme $\to$ za primitivní symbol a sestavíme axiomatický systém, v němž jsou (¬1*) a (¬2*) doplněny následujícími axiomy

(→E) $A, (A \to B) \vdash B$
(→I) $X, A \vdash B \,/\, X \vdash (A \to B)$

Konjunkce je pak definována jenom jako zkratka:

$$(A \wedge B) \equiv_{\text{Def.}} \neg(A \to \neg B).$$

Ukažme, že platí to, co jsme v předchozí verzi brali za axiomy pro konjunkci. Rozepíšeme-li v nich konjunkce podle definice, budou vypadat takto:

(∧I) $A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$
(∧E1) $\neg(A \to \neg B) \vdash A$
(∧E2) $\neg(A \to \neg B) \vdash B$

Jejich důkazy jsou pak následující:

(∧I):

1.	$A, (A \to \neg B) \vdash \neg B$	(→E)
2.	$A, \neg\neg B \vdash \neg(A \to \neg B)$	z 1. pomocí (¬3*)
3.	$B \vdash \neg\neg B$	(¬¬I)
4.	$A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$	z 2. a 3. pomocí (T)

($\wedge$E1):

1.	$\neg A, A \vdash \neg B$	($\neg$1*)
2.	$\neg A \vdash (A \to \neg B)$	z 1. pomocí ($\to$I)
3.	$\neg(A \to \neg B) \vdash \neg\neg A$	z 2. pomocí ($\neg$3*)
4.	$\neg\neg A \vdash A$	($\neg$4*)
5.	$\neg(A \to \neg B) \vdash A$	z 3. a 4. pomocí (T)

Důkaz ($\wedge$E2) je přímočaře analogický.

Od tohoto momentu je cesta k výrokové části Mendelsonova axiomatického systému cestou ne příliš zajímavé (i když ne vždy úplně jednoduché) „axiomatické gymnastiky“, kterou tu už předvedeme jenom v náznaku. Je zřejmé, že díky pravidlu ($\to$I) můžeme jakýkoli axiom tvaru $A_1,\ldots,A_n \vdash A$ nahradit axiomem $A_1,\ldots,A_{n-1} \vdash A_n \to A$ a potažmo axiomem $\vdash A_1 \to (\ldots(A_n \to A)\ldots)$. Tak můžeme axiomy ($\neg$1*) a ($\neg$2*) nahradit axiomy

$$(\neg 1^{*\prime}) \qquad \vdash (\neg A \to (A \to B))$$

a

$$(\neg 2^{*\prime}) \qquad \vdash ((A \to B) \to (((\neg A \to B)) \to B))$$

Navíc, jak lze ukázat, jsou oba tyto dva axiomy ekvivalentní axiomu

$$(\neg 1^{*\prime\prime}) \qquad \vdash ((\neg A \to B) \to (((\neg A \to \neg B)) \to A))$$

Důkaz tohoto faktu zde pouze naznačíme. Fakt, že z ($\neg$1*′′) vyplývá z ($\neg$1*′), můžeme nahlédnout tak, že nahlédneme, že ($\neg$1*′) je ekvivalentní výroku

$$\vdash ((\neg\neg(A \to A) \to B) \to (((\neg\neg(A \to A) \to \neg B)) \to A)),$$

který je instancí ($\neg$1*′′). Fakt, že z ($\neg$1*′′) vyplývá z ($\neg$2*′), je možné ukázat tak, že se ukáže, že ($\neg$1*′′) je (díky faktu, že z ($\neg$1*′′) plyne, že $A \to B$ je ekvivalentní s $\neg B \to \neg A$) ekvivalentní

$$\vdash ((\neg B \to \neg\neg A) \to (((\neg\neg B \to \neg\neg A)) \to A)),$$

což je (díky faktu, že z ($\neg$1*′′) plyne $A \to \neg\neg A$ a $\neg\neg A \to A$) dále ekvivalentní

$$\vdash ((\neg B \to A) \to (((B \to A)) \to A)).$$

Naopak fakt, že ($\neg$1*′′) vyplývá z ($\neg$1*′) a ($\neg$2*′), lze ukázat tak, že se ukáže, že ($\neg$2*′) je díky ($\neg$1*′) ekvivalentní

$$\vdash ((\neg B \to \neg A) \to (((\neg B \to \neg\neg A)) \to B)),$$

což je dále ekvivalentní

$$\vdash ((\neg B \to \neg A) \to (((\neg B \to A)) \to B)).$$

Dále platí, že axiom ($\to$I) můžeme nahradit axiomy

($\to$I1) $\vdash (A \to (B \to A))$
($\to$I2) $\vdash ((A \to (B \to C)) \to (((A \to B)) \to (A \to C)))$

Ani tento důkaz nebudeme provádět. Ukázat, že ($\to$I1) a ($\to$I2) jsou důsledkem ($\to$I), není těžké; ukázat, že naopak ($\to$I1) je důsledkem ($\to$I1) a ($\to$I2) prakticky znamená dokázat v Mendelsonově systému větu o dedukci (věta 1.9 na str. 37 v Mendelsonově knize).

Nyní se dostáváme k formulaci jazyka (J$\wedge\neg$), který již, na úrovni výrokové logiky, odpovídá té Mendelsonově:

Jazyk (L$\wedge\neg$):

Výroky:

1. A, B, C, ... jsou výroky.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \to B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Sekventy:

1. Je-li X (konečná) posloupnost výroků a je-li A výrok, je $X \vdash A$ sekvent.

Vyčleněné sekventy:

1. (I) $X, A \vdash A$
2. ($\to$E) $A, (A \to B) \vdash B$
3. $\vdash (A \to (B \to A))$
4. $\vdash ((A \to (B \to C)) \to (((A \to B)) \to (A \to C)))$

5. $\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A))$
6. (E) $X \vdash A \,/\, X,B \vdash A$
7. (C) $X,A,A \vdash B \,/\, X,A \vdash B$
8. (P) $X,A,B \vdash C \,/\, X,B,A \vdash C$
9. (T) $X,A \vdash B;\ Y \vdash A \,/\, X,Y \vdash B$

Tu už můžeme přímočaře přetransformovat z formátu přirozené dedukce zpět do podoby hilbertovského axiomatického systému:

Jazyk (L→¬):

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \rightarrow B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
3. $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A))$
4. $A, (A \rightarrow B) \vdash B$

10. Predikátový počet

Přesuňme se nyní dále k predikátové logice, to jest rozšiřme náš jazyk o nové druhy výroků obsahujících kvantifikátory. Budeme tedy předpokládat, že máme-li výrok, pak z něj můžeme nový výrok vytvořit tak, že mu předřadíme symbol $\forall$ následovaný proměnnou (kde proměnné budou pomocné symboly ze seznamu x, y, z, ...) a touto proměnnou v něm nahradíme nula nebo více výskytů nějakého jména v tomto výroku.

Jaké výroky tohoto nového druhu teď budou patřit na seznam vyčleněných výroků?

Intuice je tu zřejmá: Výrok tvaru $\forall xA$ patří na seznam, patří-li tam A „pro všechna x“. Co ale přesně znamená ono „pro všechna x“? Explikace, která se nabízí, je ta, že $\forall xA$ patří na seznam, patří-li tam každý výrok, který vznikne z A tak, že v něm všechny výskyty x nahradíme nějakým jménem. To nás, z jedné strany, vede k neproblematickému pravidlu (kde $A[s_2/s_1]$ značí výrok, který vznikne z A nahrazením všech výskytů symbolu s_1 symbolem s_2):

(∀E) $\quad \forall xA \vdash A[a/x]$,

z druhé strany bychom však potřebovali něco jako pravidlo

(∀I) $\quad A_1,A_2,A_3, \dots \vdash \forall x\mathrm{A}$,

kde $A_1,A_2,A_3, \dots$ budou výroky, které vzniknou z A nahrazením proměnné x všemi možnými jmény; a toto druhé pravidlo problematické je. Jedním problémem je, že pokud budeme mít jazyk, ve kterém je nekonečno jmen (což není případ jazyka (J∧¬), ale což může jistě vzniknout u jazyka, ve kterém je možné produkovat pomocí funktorů komplexní jména), nebudeme ho moci vůbec formulovat. Druhým problémem je, že se nezdá, že by to pravidlo bylo skutečně obecně přijatelné – pokud připustíme, že může existovat něco, pro co nemáme jméno, pak se zdá být rozumné připustit, že mohou být všechny výroky v antecedentu tohoto pravidla vyčleněné a generalizace v konsekventu může být přesto nevyčleněná.

Zdá se tedy, že pro generalizaci jako závěr potřebujeme nějaké poněkud striktnější předpoklady. Co by se zdálo být k tomu, abychom dokázali $\forall xA$, dostačující, by bylo, kdybychom dokázali A, aniž bychom přitom cokoli předpokládali o x – to by tedy pak byl důkaz vpravdě „pro jakékoli x". Příslušné pravidlo můžeme formulovat například následujícím způsobem

(∀I′) $\quad X \vdash A \;/\; X \vdash \forall xA$, jestliže X neobsahuje x jako volnou proměnnou

Není těžké ukázat, že toto pravidlo je ekvivalentní následujícím dvěma:

(∀I′1) $\quad \vdash A \;/ \vdash \forall xA$
(∀I′2) $\quad \vdash \forall x\,(B \to A) \to (B \to \forall xA)$, jestliže B neobsahuje x

Že z (∀I′) plyne (∀I′1), je zřejmé (jde jenom o speciální případ); že z něj plyne (∀I′2) dokážeme následovně (předpokládáme, že B neobsahuje x):

1. $\forall x(B\to A) \vdash B\to A$ (∀E)
2. $B, B\to A \vdash A$ (→E)
3. $B, \forall x(B\to A) \vdash A$ z 1. a 2.

4. $B, \forall x(B \rightarrow A) \vdash \forall x A$ z 3. pomocí ($\forall$I′)
5. $\forall x(B \rightarrow A) \vdash (B \rightarrow \forall x A)$ z 4. pomocí ($\rightarrow$I)
6. $\vdash \forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall x A)$ z 5. pomocí ($\rightarrow$I)

Abychom obráceně dokázali, že z ($\forall$I′1) a ($\forall$I′2) plyne ($\forall$I), postupujme následovně (předpokládáme, že X je $A_1,\ldots,A_n$ a že ani jeden z těchto výroků neobsahuje x:

1. $A_1,\ldots,A_n \vdash A$ předpoklad
2. $\vdash A_1 \rightarrow \ldots (A_n \rightarrow A)\ldots)$ z 1. opakovaným užitím ($\rightarrow$I)
3. $\vdash \forall x(A_1 \rightarrow \ldots (A_n \rightarrow A)\ldots))$ z 2. pomocí ($\forall$I′2)
4. $\vdash A_1 \rightarrow \ldots (A_n \rightarrow \forall x A)\ldots)$ z 3. opakovaným užitím ($\forall$I′1)
5. $A_1,\ldots,A_n \vdash \forall x A$ z 4. opakovaným užitím ($\rightarrow$E)

11. Závěr

Systém *přirozené dedukce*, jak název napovídá, byl zaveden mimo jiné proto, abychom mohli principy logiky formulovat v „přirozenější“, a tudíž průhlednější podobě. S podobným cílem byly formulovány i některé hilbertovské axiomatizace, jako například ten, který rozebírám v Peregrin (2003, Oddíl 2.2). Pokud ovšem zredukujeme klasickou logiku na konjunkci a negaci, situace se zjednoduší: protože fungování a potažmo axiomatizace konjunkce je zcela průhledná, redukuje se problém nalezení průhledné axiomatizace klasické logiky na problém průhledné axiomatizace negace. My jsme v této práci vyšli z toho, že díváme-li se na logiku jako na nástroj obhospodařování seznamů vyčleněných (‚pravdivých‘) výroků, můžeme se na negovaný výrok $\neg A$ dívat jako na prostředek klasifikování výroku A jako *ne*vyčleněného. To vede k formulaci potřebných axiomů pro negaci, které mohou být dále transformovány do axiomů pro implikaci, tak abychom dospěli k ‚záhadnému‘ axiomatickému systému, který předkládá Mendelson. Touto cestou se pro nás takový systém stane snad trochu méně záhadným.

Literatura

GENTZEN, G. (1934): Untersuchungen über das logische Schliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210.

GENTZEN, G. (1936): Untersuchungen über das logische Schliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 41, 405-431.

MENDELSON, E. (1964): *Introduction to Mathematical Logic*. Pacific Grove: Wadsworth & Brooks.

PEREGRIN, J. (2004): *Logika a logiky*. Praha: Academia; opravená verze elektronicky k dispozici na *jarda.peregrin.cz*.

SVOBODA, V. – PEREGRIN, J. (2009): *Od jazyka k logice*. Praha: Academia.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 140-159

Anaforický reťazec[1]

MILOŠ KOSTEREC

Katedra logiky a metodológie vied. Filozofická fakulta. Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovenská republika
milos.kosterec@gmail.com

ZASLANÝ: 16-10-2012 ▪ AKCEPTOVANÝ: 22-03-2013

Abstract: This paper deals with the problem of semantic analysis of contexts involving so-called *anaphoric chain*. The notion of anaphoric chain is explained by way of an example. Afterwards, a semantic analysis of sentences containing anaphora established in Transparent Intensional Logic (TIL) is examined. It is demonstrated that it is not adequate for texts including anaphoric chains. An alternative method using TIL that is capable to deal with all kinds of anaphora is proposed. Anyway, one may raise doubts as to whether both approaches are really analyses of anaphorically used expressions.

Keywords: Anaphora – antecedent – constituent – *SUB* function – *Tr* function.

1. Úvod

Anaforicky použité výrazy nadobúdajú svoj význam vzhľadom na predchádzajúci jazykový kontext. Tento vzťah nazývame *anaforická väzba*. Ide o pomerne častý sémantický jav. Napríklad zámená sa veľmi často používajú anaforicky. V kontexte viacerých viet, ktoré tvoria súvislý text, sa často vyskytuje niekoľko anaforických väzieb. Rôzne čítania textu získavame aj pomocou identifikácie rôznych možných anaforických väzieb. Diskusia o sé-

[1] Táto štúdia vznikla na Katedre logiky a metodológie vied Filozofickej fakulty UK v Bratislave v rámci projektu podporeného grantom VEGA č. 1/0046/11 *Sémantické modely, ich explanačná sila a aplikácia*. Ďakujem Mariánovi Zouharovi za kritické pripomienky k predchádzajúcim verziám článku.

mantickej analýze anaforicky použitých výrazov sa uskutočnila vo svete aj u nás.[2] Klasickú metódu analýzy anaforických kontextov v rámci Transparentnej intenzionálnej logiky (TIL) ponúka M. Duží v stati Duží (2006). Časom sa táto analýza rozšírila na texty pozostávajúce z viacerých viet, čo v pôvodnej stati chýbalo.

Adekvátna sémantická analýza by mala zachytiť anaforickú závislosť anaforicky použitého výrazu od tej časti predchádzajúceho jazykového kontextu (tzv. antecedentu), vzhľadom na ktorú nadobúda anaforicky použitý výraz svoj význam, ako aj samé nadobudnutie tohto významu. Pozrime sa napríklad na text:

(1) Peter prišiel. Videl. Zvíťazil.

Korektná syntaktická analýza odhalí zamlčané podmety v dvoch vetách textu (1):

(1’) Peter prišiel. On videl. On zvíťazil.[3]

Text (1’) má viac ako jedno čítanie. Získame ich napríklad pragmatickým priradením hodnôt použitým zámenám, prípadne kombináciou pragmatického priradenia a anaforickej väzby. Zdá sa však, že text (1’) má iba jedno čítanie, pre ktoré nepotrebujeme žiadne pragmatické priradenia. Je to v situácii, ktorá zrejme zároveň predstavuje jeho najprirodzenejšie čítanie, podľa ktorého sa obe zámená vzťahujú na Petra. Korektnejšie povedané, je to situácia, v ktorej obe zámená nadobúdajú svoj význam vzhľadom na význam výrazu „Peter“, ktorý sa vyskytuje v prvej vete (1’). Pri pozornejšom pohľade však zistíme, že ani pri anaforickom použití oboch zámen nemá text (1’) iba jediné čítanie. Jeho rozdielne čítania ilustrujem pomocou nasledujúcich spresnení, ktoré nie sú gramaticky úplne korektné:

(2) Peter prišiel. On (pričom myslíme Petra) videl. On (pričom myslíme Petra) zvíťazil.

---

[2] Na diskusiu, ktorá prebehla v textoch Gahér (2002) a Zouhar (2004), nadviazala Duží (2006). Podstatnú prácu v sémantickej analýze anafory v TIL predstavujú kapitola *Anaphora and Meaning* v knihe Duží – Jespersen – Materna (2010) a kapitola *Anafora a význam* v knihe Duží – Materna (2012).

[3] Predikáty *prišiel, videl, zvíťazil* sú v skutočnosti binárne. Pre jednoduchosť ich však budem v článku považovať za unárne.

(3) Peter prišiel. On (pričom myslíme Petra) videl. On (pričom myslíme toho, ktorý videl) zvíťazil.

Rozdiel medzi textami (2) a (3) spôsobujú práve rôzne anaforické väzby. V texte (2) sú obe zámená v anaforickej väzbe s výrazom „Peter“ z prvej vety. V texte (3) je v anaforickej väzbe s výrazom „Peter“ zámeno použité v druhej vete. Zámeno v tretej vete nadobúda svoju hodnotu vzhľadom na zámeno použité v druhej vete, nie vzhľadom na anaforickú väzbu s výrazom „Peter“ z prvej vety. Takéto prepojenie jednotlivých anaforických väzieb v texte sa nazýva *anaforický reťazec*, pričom jednotlivé anaforické väzby v anaforickom reťazci predstavujú *ohnivká* reťazca.

Adekvátna sémantická analýza by mala poskytnúť obe možné čítania textu (1’), pri ktorých neinterpretujeme ani jedno zo zámen pragmaticky. Ukážem, že klasická sémantická analýza anaforických väzieb v TIL neumožňuje zachytiť obe možné čítania. Zároveň predstavím inú sémantickú analýzu pomocou prostriedkov TIL, ktorá obe možné čítania zachytáva.

2. Anaforický reťazec v TIL[4]

Marie Duží vo svojej práci nadviazala na články F. Gahéra a M. Zouhara. V ich diskusii sa rozvinuli rôzne požiadavky na adekvátnu reprezentáciu významu anaforicky použitého výrazu ako aj problémy, ktorým by sa mala vyhnúť. Duží pripisuje významu viet obsahujúcich anaforický odkaz nasledujúce vlastnosti:

> Tedy význam věty s anaforickým odkazem, onen sémantický *návod* (či *instrukce*) na vyhodnocení pravdivostních podmínek je (v tomto případě) opravdu *dvoufázový* (což je zachyceno konstrukcí „double exekuce“ – dvojnásobného provedení). Tento návod zní: *Nejprve proveď substituci významu antecedentu za anaforickou proměnnou, a pak výsledek této substituce (tj. konstrukci propozice) opět proveď*. *(Obdržíš propozici, kterou můžeš a posteriori vyhodnocovat v kterémkoli empirickém kontextu w,t.)* (Duží 2006, 111)

---

[4] Predpokladám, že systém TIL je vďaka neúnavnej práci jeho zástancov čitateľovi známy. V opačnom prípade odporúčam kapitolu *Základní pojmy a definice TIL* v publikácii Duží – Materna (2012, 35-86).

Adekvátna sémantická analýza[5] by mala tieto vlastnosti postihnúť. Reprezentácia významu viet obsahujúcich anaforicky odkazujúci výraz by mala obsahovať spomínanú dvojfázovosť. Táto požiadavka zároveň kladie určité nároky na teoretický systém, ktorý využijeme pri analýze. Systém TIL je na túto úlohu dostatočne bohatý. Na zvládnutie danej úlohy používa Duží substitučnú funkciu *SUB*:

> Nechť $SUB_n/(*_n\ *_n\ *_n\ *_n)$ je funkce, která „pracuje na konstrukcích" takto: Nechť $A/*_n$, $B/*_n$, $C/*_n$, $D/*_n$ jsou konstrukce řádu *n*. Je-li funkce SUB_n aplikována na konstrukce A, B, C, pak vrací jako hodnotu konstrukci D, která vznikne korektní substitucí konstrukce A za konstrukci B do konstrukce C. (Duží 2006, 109-110)[6]

Pomocou funkcie *SUB* substituuje význam antecedentu za anaforicky použitý výraz (anaforickú premennú). Výsledkom použitia funkcie *SUB* je konštrukcia propozície, nie propozícia. Preto musíme tento výsledok ešte vykonať. Vykonanie obidvoch fáz umožňuje použitie dvojitého vykonania (double exekuce). Pozrime sa napríklad na text:

(4) Pavel vstúpil do miestnosti. On sa posadil.

Analýza prvej vety textu (4) nie je problematická, preto ju vynechám. Spomeniem iba konštrukciu zodpovedajúcu antecedentu „Pavel": ^0P. Túto konštrukciu teraz použijeme pri sémantickej analýze druhej vety textu (4). Pre korektnosť spomeniem, že konštrukciu ^0P môžeme pri analýze druhej vety použiť vďaka rozšíreniu TIL o tzv. diskurzné referenty.[7] Tie slúžia ako register objektov, ktoré sa vyskytli v predchádzajúcich častiach textu. Podľa tejto metódy analýzy vyzerá analýza druhej vety textu (4) nasledovne:

(4B) On (myslíme tým Pavla) sa posadil.
(4B*) $^2[^0SUB\ ^{00}P\ ^0c\ ^0[\lambda w \lambda t\ [^0P_{wt}\ c]]]$

---

5 M. Duží a P. Materna predkladajú svoj pohľad na podmienky adekvátnosti sémantickej analýzy v Duží – Materna (2012, 74-79).

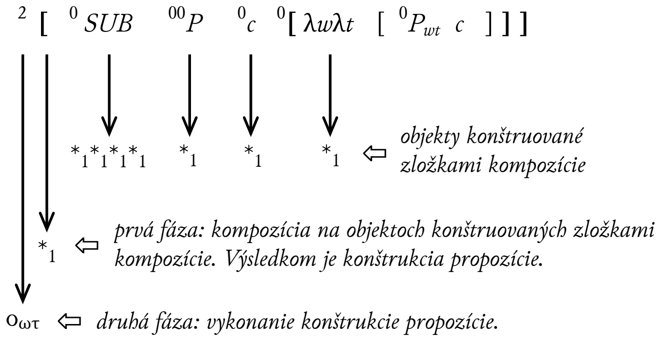
6 Funkcia *SUB* sa definuje v zásade rovnakým spôsobom aj v iných prácach o TIL. Pozri napr. Duží – Materna (2012, 66).

7 O zavedení diskurzných referentov a ich použití pozri napríklad Duží – Jespersen – Materna (2010, 346 a ďalej).

Typová analýza:

$^0SUB : *_2\ ;\ ^{00}P : *_2;\ ^0c : *_2;\ ^0[\lambda w\lambda t\ [^0P_{wt}\ c\ ]] : *_2$

Syntéza:



V prvej fáze substituujeme konštrukciu ^0P za premennú c do konštrukcie $\lambda w\lambda t\ [^0P_{wt}\ c]$, čím sa konštruuje konštrukcia propozície: $[\lambda w\lambda t\ [^0P_{wt}\ ^0P]]$. V druhej fáze sa konštruuje sama propozícia (objekt typu $o_{\omega\tau}$). Možno nie je zrejmé, prečo sa objekt P dvakrát trivializuje a prečo trivializujeme premennú c, ktorá je sama konštrukciou. Konštrukcia ^{00}P sa v prepise nachádza kvôli funkcii *SUB* v kompozícii. Funkcia *SUB* sa definuje na konštrukciách. Výsledkom použitia konštrukcie kompozície je aplikácia funkcie v-konštruovanej konštrukciou ^0SUB na argumenty v-konštruované konštrukciami ^{00}P, ^0c a $^0[\lambda w\lambda t\ [^0P_{wt}\ c]]$, čiže ^0P, c a $[\lambda w\lambda t\ [^0P_{wt}\ c]]$. Tie sú objektmi vhodného typu. Ak by sme však použili priamo tieto konštrukcie:

(4B**) $^2[^0SUB\ ^0P\ c\ [\lambda w\lambda t\ [^0P_{wt}\ c]]]$

získali by sme v-nevlastnú konštrukciu. Funkcia *SUB* sa totiž nedefinuje na objektoch, ktoré zodpovedajú vykonaniu konštrukcií ^0P a c.

Zdá sa, že je všetko v poriadku. Analýza (4B*) zachytáva konštrukciu propozície. Navyše sa tak deje podľa návodu, ktorý podľa Duží vlastne vety s anaforickým odkazom predstavujú. Akú vetu však analýza (4B*) zachytáva? Určite to nie je druhá veta v príklade (4). Dôvod je jednoduchý: Žiadny podvýraz druhej vety v texte (4) nezmieňuje použitie substitučnej funkcie. Platí:

> … co je to *přípustná analýza* daného výrazu *V*. Je to taková konstrukce *C*, že žádná uzavřená podkonstrukce konstrukce *C* nekonstruuje objekt, o kterém výraz *V* nemluví, který není výrazem *V* zmíněn… Dále je nutno vysvětlit, co míníme tím, že nějaký objekt je daným výrazem zmíněn. Je to takový objekt, který je označen nějakým smysluplným podvýrazem daného výrazu *V*, včetně *V* samotného. (Duží – Materna 2012, 51)

Podľa určenia prípustnej analýzy nie je analýza (4B*) prípustnou analýzou druhej vety textu (4) jednoducho preto, že v žiadnom z podvýrazov vety sa nezmieňuje napríklad trivializácia substitučnej funkcie. Podľa zástancov tejto analýzy patrí analýza druhej vety v texte (4) výrazu (4B), ktorý by mal verne zachytávať význam druhej vety v texte (4). Prvým problémom však je to, že výraz (4B) zrejme nie je vetou slovenského alebo českého jazyka. Druhý problém nám vystúpi v súvislosti s princípom kompozicionality v TIL:

> Princip kompozicionality se dá zhruba formulovat také takto: Syntaktické operace, dle kterých je daný výraz *V* složen ze svých podvýrazů, odpovídají sémantickým operacím, dle kterých je význam výrazu *V* složen z významů jeho podvýrazů. (Duží – Materna 2012, 77)

Konštrukcia (4B*) obsahuje ako svoju podkonštrukciu význam vety „On sa posadil". Význam druhej vety v kontexte (4) je však iný – predstavuje zrejme úplný návod na konštrukciu propozície. Ak analýza predpokladá princíp kompozicionality, je otázkou, aká syntaktická operácia zodpovedá doplneniu významu vety „On sa posadil" pomocou substitúcie. Sotva to bude výraz (4B) pretože, ako sme už povedali, zrejme to ani nie je adekvátne utvorená veta. Analýze (4B*) skôr zodpovedá formulácia typu: „On sa posadil, pričom substituujme Pavla za On." Táto veta je však odlišná od druhej vety v texte (4). Spomínaný návrh analýzy má ešte aspoň jeden ďalší kľúčový nedostatok. V úvode sme určili anaforické výrazy ako výrazy, ktoré nadobúdajú svoj význam vďaka väzbe na predchádzajúci jazykový kontext. Analýza (4B*) však zjavne neobsahuje žiadnu podkonštrukciu, ktorej by mohol zodpovedať taký podvýraz analyzovanej vety, ktorý by spadal medzi anaforicky použité výrazy podľa nášho vymedzenia. Zdá sa, že v druhej vete v texte (4) je zámeno „On" použité anaforicky a vďaka anaforickej väzbe by malo odkazovať na Pavla. Pozrime sa však na úlohu premennej *c* v analýze (4B*). V danej analýze premenná *c* vôbec nevystupuje ako konštituent. Nie je použitá na konštrukciu indivídua. Je iba zmienená a následne sa za ňu substituuje konštrukcia $^{0}Pavel$ a až tá je použitá ako konštituent konštruujúci indivíduum. Navrhovaná analýza sa teda *de facto* týka vety, ktorá neobsahuje anaforicky použitý výraz. To je závažný nedostatok tejto analýzy. V ďalších úvahách v článku treba mať tieto fakty stále na zreteli pri hodnotení adekvátnosti navrhovaných postupov sémantických analýz viet obsahujúcich anaforicky použité výrazy.

Použime teraz tento postup na analýzu textov (2) a (3). Keďže je medzi nimi relevantný sémantický rozdiel, mala by ho analýza objasniť. Analyzujme najprv text (2)

(2) Peter prišiel. On_1 (pričom myslíme Petra) videl. On_2 (pričom myslíme Petra) zvíťazil.[8]

Analýzu prvej časti textu opäť vynechám. Spomeniem iba sémantickú analýzu antecedentu „Peter“: ^{0}P. Analýzy druhej a tretej vety textu (2) podobajú:

(2B) On_1 (pričom myslíme Petra) videl.
(2C) On_2 (pričom myslíme Petra) zvíťazil.

Analýzy:

(2B*) $^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_1\ ^{0}[\lambda w \lambda t\ [^{0}V_{wt}\ On_1]]]$
(2C*) $^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_2\ ^{0}[\lambda w \lambda t\ [^{0}Z_{wt}\ On_2]]]$

Typová analýza:

$^{0}SUB : *_2;\ ^{00}P : *_2;\ ^{0}On_{1,2} : *_2;\ ^{0}[\lambda w \lambda t\ [^{0}V_{wt}\ On_1]] : *_2;$
$^{0}[\lambda w \lambda t\ [^{0}Z_{wt}\ On_2\ ]] : *_2$

Syntézy sa v prípadoch (2B*) a (2C*) prakticky zhodujú s prípadom (4B*). Preto ich nebudem uvádzať. Spomeniem iba to, že vetám (2B) a (2C) mimo kontext zodpovedajú otvorené konštrukcie, keďže obsahujú voľné premenné zodpovedajúce použitým zámenám. V textoch (2) a (3) sa však zámená používajú anaforicky.

Analyzujme teraz text (3).

---

[8] V ďalšom texte budem jednotlivé použitia zámena „on“ na vhodných miestach indexovať pre ich jednoduchšie rozlíšenie v sémantickej analýze.

(3) Peter prišiel. On_1 (pričom myslíme Petra) videl. On_2 (pričom myslíme toho, ktorý videl) zvíťazil.

Analýza prvých dvoch viet textu (3) sa zhoduje s analýzou prvých dvoch viet textu (2). Preto sa zameriam iba na poslednú vetu:

(3C) On_2 (pričom myslíme toho, ktorý videl) zvíťazil.

Analýza musí zohľadniť fakt, že zámeno „On_2" sa nachádza v anaforickej väzbe s anaforicky použitým zámenom „On_1" v druhej vete textu. Substituovať za premennú On_2 teda *nemôžeme* priamo konštrukciu ${}^0P$, ale najprv význam antecedentu, teda anaforicky použitého zámena „On_1" v druhej vete. Obsahuje však uvedená analýza druhej vety textu (3B) nejaký vhodný antecedent? Môžeme v druhej vete, resp. v jej sémantickej analýze nájsť antecedent anaforicky použitého zámena „On_2" ako *samostatný významový celok*, ktorý by sme použili pri substitúcii? Inými slovami, akú časť sémantickej analýzy vety (3B)

(3B*) $^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0V_{wt}\ On_1]]]$

máme dosadiť do schémy konštrukcie:

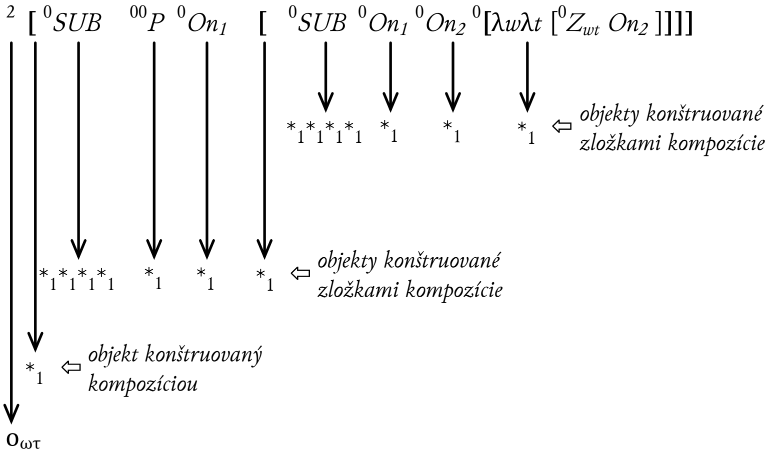
(3C?) $^2[{}^0SUB\ ???\ {}^0On_2\ {}^0[\lambda w\lambda t\ [{}^0Z_{wt}\ On_2]]]$

za otázniky? Vzhľadom na použitie funkcie SUB a premennej On_2 by to mala byť konštrukcia konštrukcie indivídua. Jediné typovo vhodné podkonštrukcie analýzy (3B*) sú konštrukcie ${}^0P$ a On_1, ktoré by viazala trivializácia. Pri použití ${}^{00}P$ namiesto otáznikov v (3C?) však získame rovnaký výsledok ako v prípade analýzy (2C*). To je neuspokojivé, pretože adekvátna sémantická analýza by mala postihnúť rozdiel medzi (2) a (3). Ak na druhej strane použijeme namiesto otáznikov konštrukciu ${}^0On_1$, tak ako výsledok dostaneme otvorenú konštrukciu. To je rovnako neuspokojivý výsledok, pretože textu (3) rozumieme bez potreby ďalšej informácie.

Vidíme, že tretiu vetu textu (3) nemôžeme analyzovať pomocou schémy (3C?). Text (3) obsahuje dve anaforicky použité zámená, pričom význam obidvoch by sa mal nachádzať v sémantickej analýze vety (3C). Musíme totiž zachytiť to, že zámeno „On_2" nadobúda svoj význam od antecedentu, ktorým je *anaforicky použité* zámeno „On_1" v druhej vete textu. Pozrime sa na nasledujúci prepis:

$$(3C^{**})\ {}^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ [{}^0SUB\ {}^0On_1\ {}^0On_2\ {}^0[\lambda w \lambda t\ [{}^0Z_{wt}\ On_2]]]]$$

Syntéza:



Analýza (3C**) obsahuje dve použitia funkcie *SUB*. Syntéza (3C**) postupne ukazuje, ako sa najprv konštrukcia On_1 substituuje za konštrukciu On_2. Následne sa za konštrukciu On_1 substituuje konštrukcia ${}^0P$. Vznikne tak konštrukcia propozície, ktorá sa vykoná dvojitým vykonaním.

Mohlo by sa zdať, že sme problém vyriešili. Daná konštrukcia uchopuje, ako sa význam zámena „On$_2$" nahrádza významom zámena „On$_1$", ktorý sa následne nahrádza významom výrazu „Peter". Napriek tomu to nie je korektná analýza textu (3). Význam zámena „On$_2$" je v anaforickej väzbe s anaforicky použitým zámenom „On$_1$" a nie so zámenom „On$_1$". Anaforicky použité zámeno „On$_2$" sa viaže na antecedent v druhej vete textu. Význam antecedentu, teda *anaforicky použitého* zámena „On$_1$", by sa mal nachádzať v sémantickej analýze druhej vety. Vieme však v analýze (3C**) identifikovať anaforickú väzbu zámena „On$_2$" s antecedentom nachádzajúcim sa v druhej vete textu? V analýze (3C**) najprv substituujeme za význam zámena „On$_2$" význam zámena „On$_1$", ktorým je však *voľná premenná*, teda nie význam anaforicky použitého zámena. Významom *anaforicky použitého* zámena v druhej vete by nemala byť voľná premenná. Otázne však je, čo je jeho významom.

Táto analýza nám hovorí, ako analyzovať vety s anaforickým odkazom. Nehovorí nám však to, ako analyzovať význam anaforicky použitého zámena. Problémom tohto spôsobu analýzy viet obsahujúcich anaforický odkaz je to, že hoci konštruujú vhodné propozície, nekonštruujú ich vhodným spôsobom. Pri použití tohto spôsobu nevieme identifikovať v druhej vete textu vhodný antecedent.

Pre adekvátne zachytenie anaforického reťazca potrebujeme zachytiť to, ako odvodzuje anaforicky použitý výraz v poslednej časti textu svoj význam od významu antecedentného výrazu v druhej vete. V analýze (3C**) sme síce uchopili substitúciu významu antecedentu za význam zámena „On_1“, no táto väzba sa nevyskytuje vo význame antecedentu v sémantickej analýze druhej časti textu (3B) *ako samostatný prvok*. Znamená to, že antecedent zámena „On_2“ sa nenachádza vo vete (2B). Hoci sme tvrdili, že význam výrazu „On_2“ sa odvodzuje od významu anaforicky použitého výrazu „On_1“ obsiahnutého v druhej vete textu, nevidíme túto previazanosť na úrovni sémantickej analýzy jednotlivých viet. Je teda otázna aj adekvátnosť analýzy (3C**). Uchopuje síce previazanosť významov výrazov „Peter“, „On_1“ a „On_2“, no neuchopuje previazanosť významov týchto výrazov *v texte (3)*. Táto sémantická analýza viet obsahujúcich anaforický odkaz teda nie je v prípade anaforického reťazca vhodná.

Prečo pôvodná sémantická analýza anaforicky použitého výrazu pomocou TIL nepostačuje? Identifikácia antecedentov v texte tvorenom viacerými vetami využíva v TIL tzv. referenty diskurzu (discourse referents). Referent diskurzu funguje ako pomocná premenná, ktorá ako svoj význam nadobúda vhodné antecedenty vyskytujúce sa v texte. Potenciálnym antecedentom sa stáva každá nový uzavretý konštituent významu výrazu, ktorý sa vyskytne v danom diskurze.

> Každý uzavřený konstituent významu výrazu, který se vyskytne v daném diskurzu, se stává dočasnou hodnotou typově vhodného referenta diskurzu. Jakmile sa vyskytne anaforický odkaz, metoda vyhledá typově vhodnou hodnotu referentu a dosadí ji za anaforickou proměnnou pomocí naší substituční metody. (Duží – Materna 2012, 380)

Pri navrhovanej substitučnej metóde sa však v sémantickej analýze druhej vety textu (3):

(3B*) $^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_1\ ^{0}[\lambda w\lambda t\ [^{0}V_{wt}\ On_1]]]$

nevyskytuje žiaden uzavretý konštituent,[9] ktorý by sme mohli stotožniť s významom anaforicky použitého zámena „On_1“. To znamená, že sa ani

9 Duží a Materna píšu: „Přesná definice *konstituentu* je trochu složitější... prozatím stačí charakteristika, že konstituenty dané konstrukce *C* jsou ty její podkonstrukce, kte-

nemôže stať hodnotou vhodného referenta diskurzu. Zámeno v tretej vete textu sa podľa tejto metódy nemôže vzťahovať na *anaforicky použité* zámeno v druhej vete. Preto ani analýza tretej vety textu (3) nemôže obsahovať analýzu anaforickej väzby zámena „On_2“ s antecedentom v druhej vete. Z toho dôvodu táto analýza viacvetných textov neumožňuje uchopenie všetkých čítaní.

Vzhľadom na tento problém treba navrhnúť adekvátnu sémantickú analýzu anaforickej väzby vhodnú aj na sémantickú analýzu anaforického reťazca. Hlavnou požiadavkou pri tom je to, aby sme v sémantickej analýze vety obsahujúcej anaforicky použitý výraz vedeli identifikovať jeho význam *ako samostatný významový celok*.

3. Návrh

V nasledujúcom texte navrhnem alternatívnu analýzu formúl s anaforickým odkazom v TIL. Najprv predstavím predbežnú verziu analýzy, ktorá si vyžiada isté úpravy. Postačí však na uvedenie princípu navrhovanej analýzy. Nedostatky predbežnej verzie návrhu sa ukážu na príkladoch. Následne prezentujem novú všeobecnú schému na analýzu významu anaforicky použitých výrazov. Ide o uniformný návrh pre všetky výskyty anafory, čo demonštrujem na uvedených textoch. Ak však uplatníme kritériá prípustnej analýzy a dôsledne uplatníme princíp kompozicionality, nebudú ani tieto analýzy zodpovedať vetám s anaforicky použitým výrazom. Naše analýzy predpokladajú, že každý kompetentný používateľ jazyka je schopný formulovať prístavkovú vetu, ktorá je parafrázou vety s anaforickým odkazom. Spomínané sémantické analýzy sa týkajú až týchto prístavkových viet, ktoré však neobsahujú anaforicky použitý výraz. Sémantická analýza anaforického reťazca preto trpí podobnými zásadnými nedostatkami ako pôvodný všeobecný návrh analýzy viet s anaforickým odkazom.

Pozrime sa najprv na jednoduchší príklad. Vráťme sa k textu (4) (t. j. „Pavel vstúpil do miestnosti. On sa posadil.“). Predbežne navrhujem analyzovať druhú vetu nasledujúcim spôsobom. Najprv formulujme prístavkovú vetu, ktorá parafrázuje druhú vetu v texte (4):

(4B’) On, teda Pavel, sa posadil.

ré jsou *užity* k získání výstupu, tedy je nutno je provést, chceme-li provést *C*.“ (Duží – Materna 2012, 61)

Prvá verzia navrhovanej sémantickej analýzy tejto vety:

(4B”) $[\lambda w \lambda t\ [{}^0P_{wt}\ {}^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On\ {}^0On]]]$

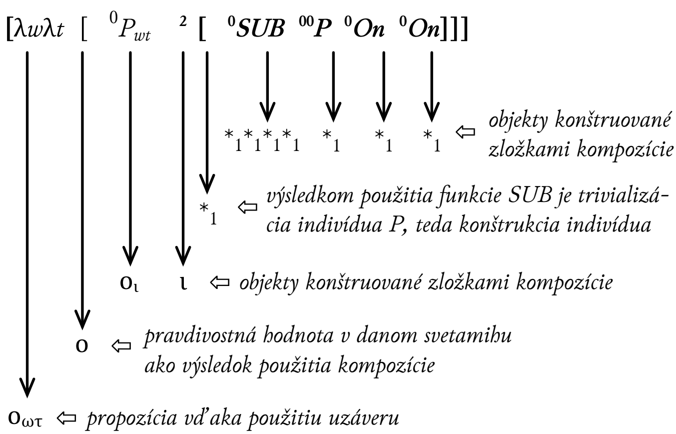
Hlavný rozdiel oproti predchádzajúcemu návrhu sa týka použitia funkcie *SUB*. Funkcia *SUB* slúžila v predchádzajúcich analýzach na substituovanie významu antecedentu za premennú. Pôvodná otvorená propozičná konštrukcia bola vtedy jedným z argumentov funkcie *SUB*:

(4B*) $^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0c\ {}^0[\lambda w \lambda t\ [{}^0P_{wt}\ c]]]$

Bola to konštrukcia, do ktorej sme substituovali za premennú. V tomto použití sme nemohli uchopiť žiadny konštituent, ktorý by zodpovedal významu anaforicky použitého zámena. Dôvodom bolo práve použitie celej pôvodnej otvorenej propozičnej konštrukcie ako jedného z argumentov funkcie *SUB*. Anaforicky použité zámeno však získava svoj význam vďaka väzbe s antecedentom a nie vďaka tomu, že sa zmienime o propozícii, v ktorej sa nachádza. Význam anaforicky použitého zámena by mal patriť medzi samostatné konštituenty propozície a nie naopak.

Vo svojej analýze používam funkciu *SUB* iba na substitúciu konštrukcie ^0P za význam zámena „On“. Ako konštrukcia, do ktorej substituujeme použitím funkcie *SUB*, je však zmienená iba voľná premenná *On*, ktorá zodpovedala pôvodnému zámenu „On“ v otvorenej konštrukcii.

Takto uchopený význam výrazu „On, teda Pavel “ následne patrí medzi konštituenty výslednej propozície. Názornejšie sa to ukáže pri syntéze:



Táto analýza spĺňa podmienky použitia substitučnej funkcie.[10] Substitúciou nekolidovali žiadne premenné. Mohlo by sa zdať, že sme substituovali za premennú, ktorú viaže trivializácia ^{0}On. Vzhľadom na jej umiestnenie *v kompozícii* sme však substituovali až do konštrukcie *On,* ktorá je ako premenná konštrukciou vhodného typu a zároveň nie je viazaná. Táto analýza vety (4B) teda spĺňa technické podmienky. Jednotlivé zložky v danom zložení nakoniec konštruujú vhodnú propozíciu. Navyše v analýze (4B") môžeme identifikovať samostatný konštituent, ktorý predstavuje význam výrazu „On, teda Pavel", ktorým parafrázujeme význam anaforického zámena: $^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On\ ^{0}On]$. V tejto konštrukcii je zrejmá väzba s antecedentom. Zároveň zachytáva obe fázy použitia výrazu: získanie významu od antecedentu pomocou substitúcie a následné vykonanie výsledku tejto substitúcie. Navrhovaná predbežná analýza významu viet obsahujúcich anaforický odkaz teda spočíva v analýze samostatného významu výrazu „On, teda Pavel" vo vete (4B') pomocou funkcie *SUB*.

Vráťme sa teraz k pôvodnému problému analýzy anaforického reťazca. Skúsme analyzovať text (2) (t. j. „Peter prišiel. On (pričom myslíme Petra) videl. On (pričom myslíme Petra) zvíťazil."). Analýzu prvej vety opäť vynechám. Analýzy druhej a tretej vety v tomto texte sa prakticky zhodujú. Obe však predstavujú analýzy prístavkových viet:

(2B') On, teda Peter, videl.
(2C') On, teda Peter, zvíťazil.
(2B") $[\lambda w \lambda t\ [^{0}V_{wt}\ ^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_{1}\ ^{0}On_{1}]]]$
(2C") $[\lambda w \lambda t\ [^{0}Z_{wt}\ ^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_{2}\ ^{0}On_{2}]]]$

Syntéza sa v obidvoch prípadoch prakticky zhoduje so syntézou v prípade vety (4B'). Preto ju nebudem uvádzať. Zaujímavým výsledkom je možnosť identifikácie významu prístavkových častí viet: $^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_{1}\ ^{0}On_{1}]$, $^{2}[^{0}SUB\ ^{00}P\ ^{0}On_{2}\ ^{0}On_{2}]$.

Väčšiu výzvu by mal zrejme predstavovať text (3) (t. j. „Peter prišiel. On (pričom myslíme Petra) videl. On (pričom myslíme toho, ktorý videl) zvíťazil."). Analýzu prvej vety vynechám a analýza druhej vety sa zhoduje s príkladom (2B"). Prejdime teraz k analýze vety (3C).

---

10 „Korektní substituce je taková, která nezpůsobuje kolizi proměnných, tj. žádná proměnná vyskytující se volně v X se nesmí stát po substituci vázanou." (Duží – Materna 2012, 66).

(3C) On (pričom myslíme toho, ktorý videl) zvíťazil.

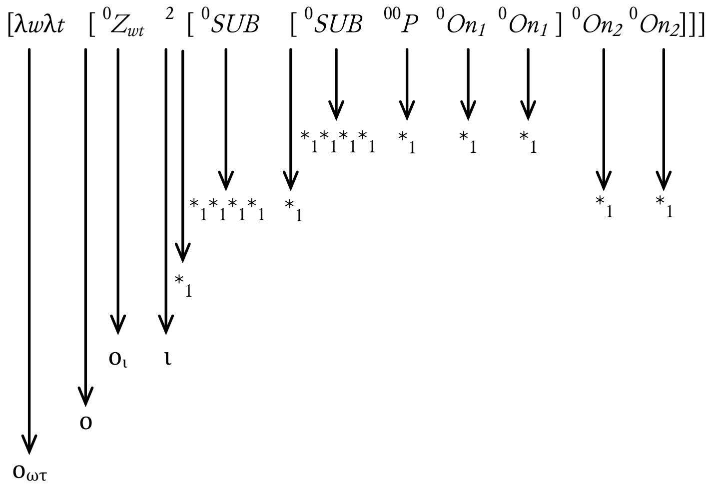
Opäť najprv formulujeme prislúchajúcu prístavkovú vetu:

(3C’) On_2, teda On_1, teda Peter, zvíťazil.

Vieme, že antecedentom anaforicky použitého zámena „On_2“ je anaforicky použité zámeno „On_1“ v druhej vete. Vieme zároveň identifikovať význam parafrázy významu tohto antecedentu v prístavkovej vete (2C’): $^2[^0SUB\ ^{00}P\ ^0On_1\ ^0On_1]$. Analýza vety (3C’) pomocou navrhnutého použitia funkcie *SUB* vyzerá nasledovne:

(3C”) $[\lambda w\lambda t\ [^0Z_{wt}\ ^2[^0SUB\ [^0SUB\ ^{00}P\ ^0On_1\ ^0On_1]\ ^0On_2\ ^0On_2]]]$

Syntéza:



V tejto analýze (3C”) vieme identifikovať samostatný konštituent, ktorý zodpovedá sémantickému uchopeniu parafrázy významu anaforicky použitého zámena „On_2“:

$$^2[^0SUB\ [^0SUB\ ^{00}P\ ^0On_1\ ^0On_1]\ ^0On_2\ ^0On_2]$$

Väzbu na antecedent predstavuje použitie konštrukcie $[^0SUB\ ^{00}P\ ^0On_1\ ^0On_1]$, ktorá je podkonštrukciou parafrázy významu anaforicky použitého zámena „On_1“ v druhej vete textu (3): $^2[^0SUB\ ^{00}P\ ^0On_1\ ^0On_1]$.

Pomocou tejto analýzy teda vieme rozlíšiť relevantné sémantické rozdiely medzi textami (2) a (3). Súčasne vieme identifikovať samostatné konštituenty, ktoré zodpovedajú parafrázam významu anaforicky použitých výrazov. Napriek tomu analýzy v tejto podobe nespĺňajú niektoré základné východiská systému TIL. Ako vieme, TIL je zásadne antikontextualistický systém. Analýza významu výrazu by nemala byť podmienená kontextom, v ktorom sa tento výraz vyskytuje. Pozrime sa teraz bližšie na uvedené analýzy viet (3B') a (3C'):

(3B") $[\lambda w \lambda t\ [{}^0V_{wt}\ {}^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ {}^0On_1]]]$
(3C") $[\lambda w \lambda t\ [{}^0Z_{wt}\ {}^2[{}^0SUB\ [{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ {}^0On_1]\ {}^0On_2\ {}^0On_2]]]$

Všimnime si, akým spôsobom sa význam antecedentu podieľa na význame parafráz anaforicky použitých výrazov. Podľa analýzy (3C") je anaforicky použité zámeno v tretej vete (3C) v anaforickej väzbe iba s časťou významu antecedentu. V analýze (3C") zodpovedá významu antecedentu konštrukcia, v ktorej sa nevyskytuje dvojité vykonanie, t. j. $[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ {}^0On_1]$, kým v analýze (3B") sa dvojité vykonanie vyskytuje: ${}^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ {}^0On_1]$.

Podmieňuje to použitie funkcie *SUB*. Ak by sme použili celý význam antecedentu, neskonštruovali by sme propozíciu. Analýza parafrázy anaforicky použitého výrazu v druhej vete (3B") však obsahuje celý význam antecedentu. Ďalší rozdiel spočíva v podobe analýzy. Kým význam antecedentu v analýze druhej vety (3B") sa viaže trivializáciou, analýza (3C") obsahuje priamo podkonštrukciu významu antecedentu bez trivializácie. Hoci analýzy oboch viet konštruujú propozíciu, chýba zdôvodnenie rozdielneho postupu pri analýze parafráz významu anaforicky použitých výrazov. Ak nie je antecedentom anaforicky použitého výrazu iný anaforicky použitý výraz, tak pri substitučnej funkcii používame trivializovaný význam antecedentu. Ak je antecedentom anaforicky použitého výrazu iný anaforicky použitý výraz, tak v parafrázach pri substitučnej funkcii používame kompozíciu, ktorá predstavuje podkonštrukciu antecedentu. Na jednej strane tak síce v tejto analýze môžeme identifikovať významy parafráz anaforicky použitých výrazov vo vetách ako samostatné konštituenty daných viet – to bola námietka voči pôvodnému návrhu analýzy anafory TIL; ak však na druhej strane použijeme náš postup analýzy v tejto podobe pri textoch obsahujúcich anaforický reťazec, nepostupujeme pri analýze všetkých prvkov v danom reťazci jednotne – kontextualizmus „ako vyšitý".

Navrhovaná analýza má teda závažný nedostatok. Výhodou predbežnej analýzy bolo uchopenie parafrázy významu anaforicky použitého výrazu ako samostatného konštituentu. Zabezpečil to hlavne nový spôsob použitia funkcie *SUB*. Ako hlavný nedostatok sa ukázal rozdielny spôsob uplatnenia významu antecedentu vo význame parafrázy anaforicky použitého výrazu. Okrem technických dôvodov však chýbali relevantné dôvody na to, aby sa vo význame parafrázy anaforicky použitého výrazu podieľala iba podkonštrukcia významu antecedentu a nie celý význam antecedentu.

Význam antecedentov v príkladoch konštruuje objekt, ktorý je v hierarchii o úroveň nižšie, ako potrebujeme pre funkciu *SUB*. Aj preto je v pôvodnej analýze v TIL význam antecedentu viazaný trivializáciou alebo trivializovaný pomocou funkcie *Tr*. Ak v analýze vety (3C') využijeme celý význam antecedentu:

(3C''') $[\lambda w \lambda t\ [{}^0Z_{wt}\ {}^2[{}^0SUB\ {}^2[{}^0SUB\ {}^{00}P\ {}^0On_1\ {}^0On_1]\ {}^0On_2\ {}^0On_2]]]$

získame nevlastnú konštrukciu. Ak navyše význam antecedentu ešte uchopíme trivializáciou rovnako ako antecedent v analýze predchádzajúcej vety (3B''), tak opäť získame nevlastnú konštrukciu.

Riešenie predstavuje použitie funkcie *Tr*. V rámci systému TIL sa definuje nasledovne:

> Typově polymorfní funkce Tr_α je definována takto. Nechť *a* je objekt typu α. Pak $Tr_\alpha / (*_n\ \alpha)$ vrací na argumentu *a* Trivializaci prvku *a*. (Duží – Materna 2012, 66)

Zdôrazním rozdiel medzi *konštrukciou* trivializácie (znak ^{0}) a *funkciou* Tr_α. Konštrukcia trivializácie konštruuje objekt, ktorý viaže. Napríklad ${}^0 3$ konštruuje objekt *3*. Tr_α ako funkcia vracia hodnoty vzhľadom na argument. Tento jav predstavuje aplikáciu funkcie na argument a preto sa v TIL spája s kompozíciou, ktorá slúži na zachytenie týchto javov. Napríklad $[{}^0Tr_\tau\ {}^0 3]$ konštruuje ${}^0 3$.

Nová schéma analýzy parafráz významu anaforicky použitých výrazov má nasledujúci tvar:

${}^2[{}^0SUB\ [{}^0Tr\ ???]\ {}^0x\ {}^0x]]$

Namiesto otáznikov patrí celý význam antecedentu. Rovnaký postup je pri všetkých antecedentoch. Ako premenné vystupujú významy pôvodných neanaforicky použitých výrazov. Táto schéma je jednotná pre všetky analýzy významu parafráz anaforicky použitých výrazov bez ohľadu na ich umiestnenie v anaforickom reťazci alebo mimo neho a bez ohľadu na to, akého druhu je antecedent anaforického zámena. Zachováva sa význam parafráz anaforicky použitého výrazu ako samostatný konštituent. Na rozdiel od predchádzajúcej analýzy nevzniká kontextualizmus, čo možno ukázať na príkladoch.

Hlavný problém predstavovala analýza sémantického rozdielu medzi textami (2) a (3). Pozrime sa najprv na analýzu druhých viet týchto textov, ktorých význam sa zhoduje:

(2B/3B) On_1 (pričom myslíme Petra) videl.

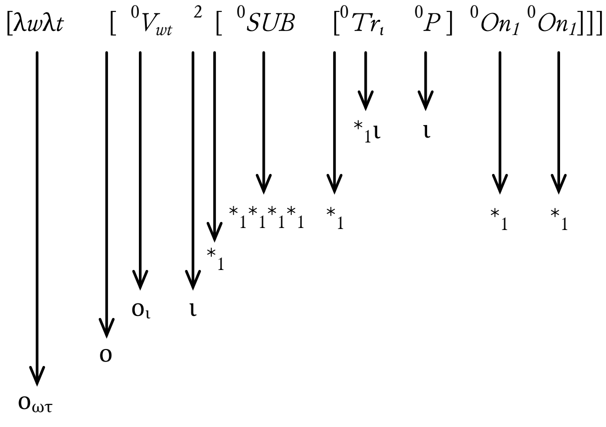
Prístavková veta, ktorú formulujeme ako parafrázu viet(2B/3B):

(2B'/3B') On_1, teda Peter, videl.

Analýza (schéma je zvýraznená hrubo, významom antecedentu je ^0P) :

(2B$^+$/3B$^+$) $[\lambda w\lambda t\ [^0V_{wt}\ {}^2[^0SUB\ [^0Tr_\iota\ {}^0P]\ {}^0On_1\ {}^0On_1]]]$

Syntéza:



Významu parafrázy anaforicky použitého výrazu „On_1, teda Peter" zodpovedá konštituent:

$$^2[^0SUB\ [^0Tr_\iota\ {}^0P]\ {}^0On_1\ {}^0On_1]$$

Pôvodný antecedent ^0P sa tu nachádza celý. Analýza parafrázy tretej vety textu (2) sa prakticky zhoduje s analýzou (2B$^+$):

(2C') On_2, teda Peter, zvíťazil.
(2C$^+$) $[\lambda w\lambda t\ [^0Z_{wt}\ {}^2[^0SUB\ [^0Tr_\iota\ {}^0P]\ {}^0On_2\ {}^0On_2]]]$

Syntéza sa prakticky zhoduje s prípadom ($2B^+$). Pozrime sa teraz na analýzu tretej vety textu (3):

(3C) On_2 (pričom myslíme toho, ktorý videl) zvíťazil.

Analýza:

(3C') On_2, teda On_1, teda Peter, zvíťazil.
($3C^+$) $[\lambda w \lambda t\ [{}^0Z_{wt}\ {}^2[{}^0SUB\ [{}^0Tr\ {}^2[{}^0SUB\ [{}^0Tr_\iota\ {}^0P\ ]\ {}^0On_1\ {}^0On_1]]\ {}^0On_2\ {}^0On_2]]$

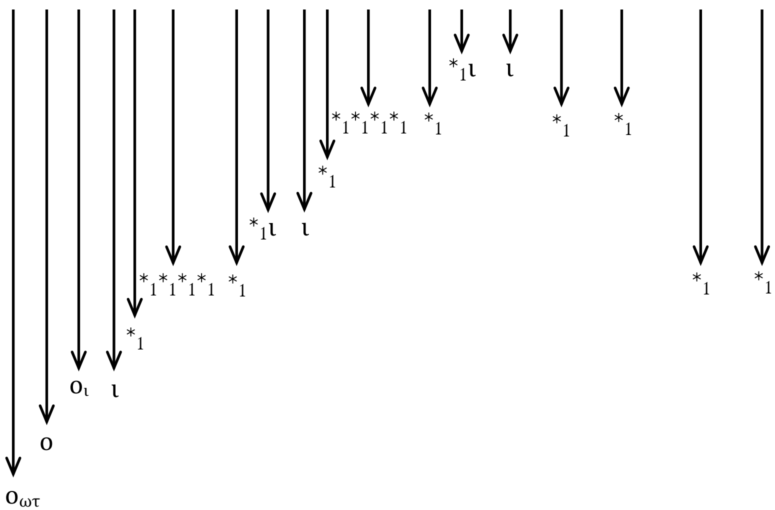
V analýze ($3C^+$) sa používa navrhnutá schéma dvakrát. Antecedentom parafrázy anaforicky použitého výrazu „On_2" je totiž opäť parafráza anaforicky použitého výrazu „On_1". Významom antecedentu parafrázy anaforicky použitého výrazu „On_1" je konštrukcia ${}^0P$. Významom antecedentu parafrázy anaforicky použitého výrazu „On_2" je konštrukcia ${}^2[{}^0SUB\ [{}^0Tr_\iota\ {}^0P]\ {}^0On_1\ {}^0On]$. Zhoduje sa s významom parafrázy anaforicky použitého výrazu v analýze ($3B^+$). Význam parafrázy anaforicky požitého výrazu „On_2" som zvýraznil hrubo. V reprezentácii významu parafrázy anaforicky použitého výrazu „On_2":

$${}^2[{}^0SUB\ [{}^0Tr_\iota\ {}^2[{}^0SUB\ [{}^0Tr_\iota\ {}^0P]\ {}^0On_1\ {}^0On_1]]\ {}^0On_2\ {}^0On_2]$$

teda vieme identifikovať jeho antecedent ako aj antecedent jeho antecedentu.

Syntéza:

$[\lambda w \lambda t\ [{}^0Z_{wt}\ \ {}^2[{}^0SUB\ \ [{}^0Tr_\iota\ \ {}^2[{}^0SUB\ \ [{}^0Tr_\iota\ \ {}^0P]\ {}^0On_1\ {}^0On_1]]\ {}^0On_2\ {}^0On_2]]]$



Pomocou tejto schémy analýzy parafráz významu anaforicky použitých výrazov teda vieme identifikovať relevantný sémantický rozdiel medzi textami (2) a (3). Samozrejme, platí to iba v prípade, že nahradenia viet s anaforicky použitým výrazom prístavkovými vetami sú adekvátne. Zároveň vieme reprezentovať význam *parafráz* anaforicky použitých výrazov ako samostatný konštituent. Tento význam analyzujeme vždy rovnako, a teda nevzniká kontextualizmus. Prvý predbežný návrh modifikácie pôvodnej TILovskej analýzy anafory nám ukázal, že s funkciou *SUB* musíme zaobchádzať inak ako v štandardnej analýze. To je poučenie, ktoré sme si odniesli z nedostatkov štandardnej analýzy. Druhý návrh rešpektuje toto poučenie, no zároveň ukazuje, že je potrebné zaviesť do významu funkciu *Tr*, aby sme sa vyhli nedostatkom prvého návrhu.

4. Záver

Pri analýze textov tvorených viacerými vetami by adekvátna sémantická analýza mala uchopiť všetky ich možné čítania. Anaforicky použité výrazy v textoch pozostávajúcich z troch alebo viacerých viet sú jedným zo zdrojov rôznych možných čítaní. Antecedentom anaforicky použitých výrazov môže byť výraz s vhodným významom. Antecedentom sa však môže stať aj anaforicky použitý výraz. V takom prípade hovoríme o anaforickom reťazci. Analýza textov obsahujúcich anaforický reťazec vyžaduje identifikáciu významu antecedentu vo význame vety, ktorá ho obsahuje. Ak ho nevieme identifikovať, nemôžeme ani analyzovať anaforickú väzbu, v ktorej by sa mal nachádzať. Dôvodom je to, že analýza vety, ktorá obsahuje antecedent, by neobsahovala žiadny prvok, ktorý by zodpovedal významu antecedentu. Pôvodná analýza viet obsahujúcich anaforický odkaz v TIL, má však práve túto charakteristiku. Touto metódou nevieme identifikovať v sémantických analýzach viet samostatný konštituent, ktorý by zodpovedal významu anaforicky použitého výrazu. Preto sme ju nemohli použiť na adekvátnu analýzu textov s anaforickým reťazcom. Navrhol som alternatívnu analýzu významov takýchto viet, ktorá je založená na formulácii ich parafráz pomocou prístavkových viet. Zameral som sa hlavne na analýzu parafráz významu anaforicky použitého výrazu. Tento návrh umožňuje identifikovať samostatné konštituenty, ktoré zodpovedajú parafrázam významu anaforicky použitých výrazov. Umožnila sa tým analýza parafráz textov obsahujúcich anaforický reťazec. Ak sa parafráza anaforicky použitého výrazu stane antecedentom ďalšej parafrázy anaforicky použitého výrazu, vieme to pomocou tohto návrhu zachytiť aj na úrovni sémantickej analýzy. Ak prijmeme to, že prístavkové vety takto zodpovedajú vetám s anaforickým obsahom, ide o uniformný návrh aplikovateľný na všetky výskyty anafory.

Literatúra

DUŽÍ, M. (2006): Anafora a význam. In: Zouhar, M. (ed.): *Jazyk z pohľadu sémantiky, pragmatiky a filozofie vedy*. Bratislava: Filozofický ústav SAV, 99-136.

DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. – MATERNA, P. (2010): *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic. Foundations and Applications of Transparent Intensional Logic*. Springer.

DUŽÍ, M. – MATERNA, P. (2012): *TIL jako procedurální logika. Průvodce zvídavého čtenáře Transparentní intensionální logikou*. Bratislava: aleph.

GAHÉR, F. (2002): Anafora a pojmové postoje. In: Gáliková, S (ed.): *Filozofia Ludwiga Wittgensteina*. Bratislava: Veda, 130-155.

ZOUHAR, M. (2004): Anafora a referencia. In: Zouhar, M. (ed.): *Používanie, interpretácia a význam jazykových výrazov*. Bratislava: Veda, 128-143.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 160-170

An Outline of a Substructural Model of BTA Belief[1]

IGOR SEDLÁR

Department of Logic and Methodology of Sciences. Philosophical Faculty.
Comenius University in Bratislava. Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovak Republic
sedlar@fphil.uniba.sk

RECEIVED: 14-12-2012 ▪ ACCEPTED: 03-04-2013

Abstract: The paper outlines an epistemic logic based on the proof theory of substructural logics. The logic is a formal model of belief that *i*) is based on true assumptions (BTA belief) and *ii*) does not suffer from the usual omniscience properties.

Keywords: Belief – epistemic logic – logical omniscience – substructural logics.

1. Introduction

The Gettier examples (see Gettier 1963) suggest that in order to know a proposition, the belief that the proposition holds cannot be based on false assumptions. For example, assume that my colleague Dr. A has bought a new car. I believe that one of my colleagues has bought a new car (C), but this belief is based on the false assumption that Dr. B, also a colleague of

1 This paper was written at the Department of Logic and Methodology of Sciences, Comenius University. The work was carried out as a part of the project *Semantic models, their explanatory power and applications* and supported by the VEGA grant no. 1/0046/11.

Versions of the paper have been read at the *Prague Workshop on Non-Classical Epistemic Logics* (Prague, Czech Republic, June 2012) and the symposium *Systems of Deduction* (Dolná Krupá, Slovakia, September 2012). I am grateful to the respective audiences for their constructive comments and helpful remarks. Last but not least, I wish to express my gratitude to an anonymous referee for pointing out several ways to improve the paper.

mine, is the owner (B). My belief that C is a true belief. It is also justified: by valid inference from B and $B \rightarrow C$. However, it is quite plausible to assume that I *do not know* that C. The obvious reason is that my justification of the belief that C is based upon the false assumption B.

The notion of *belief based on true assumptions* (BTA belief) is interesting even in itself, considered independently of the analysis of *knowledge* (and even independently of the Gettier examples). BTA belief is *safe*: if a justification is requested, true assumptions can be provided. Moreover, if "based on" is construed as a truth-preserving relation, then BTA belief yields *true belief*.[2]

This paper outlines a simple formal model of BTA belief. The basic idea is to use *explicit* bodies of assumptions (or information) and the consequences of portions of this body. Hence, "based on" is construed as a truth-preserving relation. However, it is not assumed that the body of assumptions is a set and that the consequence relation is classical: the model utilises the proof theory of *substructural logics*.[3]

Section 2 briefly reviews the possibilities of modelling BTA belief within standard epistemic logics. Section 3 outlines the substructural approach: epistemic states are defined and the semantics of a propositional epistemic language is given. Section 4 provides examples of valid formulas and discusses some prominent examples of non-valid formulas. Section 5 concludes the paper and outlines directions of future work.

2. Epistemic logics and BTA belief

Standard epistemic logics (see Fagin et al. 1995, ch. 1-3, for example) model belief as a necessity-like operator. Semantically, the logics correspond to various classes of models $M = (W, R, V)$, where W is a non-empty set, R is a binary relation on W and V is a valuation. The truth conditions of Boolean formulas in points $x \in W$ are the usual Boolean conditions. A formula A is *believed* in x iff A holds in every y such that Rxy.

---

2 On the other hand, if "based on" is construed, for example, in probabilistic terms, then this does not hold: a set of true propositions can make a proposition p "highly probable" while p is, in fact, false.

3 An exposition of substructural logics can be found in Restall (2000).

One may provide a BTA-like interpretation of this semantics. Assume that every x is given a body of formulas $At(x)$, seen as the *assumptions* adopted in x. The relation R may be construed as follows: Rxy iff every formula in $At(x)$ holds at y. If R is assumed to be *reflexive*, then every assumption adopted in x is true in x.

However, there are two problems. First, the bodies of assumptions $At(x)$ are not explicitly given within standard epistemic models. In general, standard epistemic logics do not articulate *reasons* for beliefs. Second, the resultant belief operator suffers from the notorious omniscience properties.[4] For example, belief is closed under every propositionally valid inference rule. As a special case, every propositional tautology is believed. In general, belief within a standard epistemic logic L is closed under every L-valid inference rule.

Both these problems are addressed by *justification logics* (see Artemov 1994, 2001, 2008 and 2011, for example). These extend the Boolean language by a set of *justification terms*. This allows to express claims such as "t justifies A", where t is a justification term and A is a formula. Informally, "t justifies A" is true in a world x only if t is an admissible evidence for A at x (or: relatively to the context of x). It has been proposed recently to interpret justification terms t as sets of formulas $*(t, x)$, relatively to worlds x (Artemov 2012). In line with this interpretation, t may be seen as corresponding to a true assumption at x iff every formula in $*(t, x)$ is true in x.

3. Epistemic states and substructural logics

This section outlines the basics of the substructural approach. Epistemic states are defined and an interpretation of the formal definition is briefly discussed. Familiarity with substructural logics is helpful, but the necessary background is provided.

Definition 3.1

The *language* L_0 is the language of classical propositional logic. The *language* L_1 is L_0 with a unary operator **Bel**. p, q, etc. (A, B, etc.) will be used as metavariables ranging over the set of propositional variables P (the set of formulas Fm). Every formula of L_0 is a *structure* and the only

[4] A readable discussion of the omniscience properties may be found in Fagin et al. (1995, ch. 9).

substructure of itself. If X and Y are structures, then $(X \,;\, Y)$ is a structure with substructures X and Y (We shall refrain from using the outermost pair of parentheses). The set of structures will be referred to as *Struct*. A *consecution* is an expression of the form $X \vdash A$, where X is a structure and A is a formula of L_0. A *structural rule* is a rule of the form

$$\frac{Y(X) \vdash A}{Y(X^*) \vdash A}$$

It is assumed that structural rules are closed under substitution of formulas. (Structural rules shall be referred to by $X \Leftarrow X^*$.) If Γ is a set of structural rules (closed under derivability[5]), then a consecution is Γ-*provable* iff it is provable using no other structural rules than those in Γ.

The intuitive interpretation of **Bel** is "it is a BTA belief that". Structures are to be seen as bodies of information, where ";" is a punctuation mark meaning "taken together with". Consecutions $X \vdash A$ are read "the structure X entails A". Structural rules state that certain structures X may be replaced (even within other structures Y) by structures X^* without affecting the set of entailed formulas. Here are some familiar examples of structural rules:

(B)	$X ; (Y ; Z) \Leftarrow (X ; Y); Z$	("Associativity")
(Bc)	$(X ; Y); Z \Leftarrow X ; (Y ; Z)$	("Converse associativity")
(CI)	$X ; Y \Leftarrow Y ; X$	("Weak commutativity")
(M)	$X \Leftarrow X ; X$	("Mingle")
(WI)	$X ; X \Leftarrow X$	("Weak contraction")
(K)	$X \Leftarrow X ; Y$	("Weakening")

We shall be working with *natural deduction* systems for substructural logics. These systems are given by the axiom $A \vdash A$, a set of structural rules and a set of introduction and elimination rules for the connectives. While variations in the former yield different substructural logics, the latter will be constant:

5 A rule R_0 is derivable from rules $R_1, \ldots, R_n$ iff the admissibility of R_0 is a consequence of the assumption that $R_1, \ldots, R_n$ are admissible. For example, (M) is derivable from (K): if $X ; Y$ may replace X, where Y is arbitrary, then, obviously, $X ; X$ may replace X as well.

(→I) If $X ; A \vdash B$, then $X \vdash A \to B$.
(→E) If $X \vdash A \to B$ and $Y \vdash A$, then $X ; Y \vdash B$
(∧I) If $X \vdash A$ and $X \vdash B$, then $X \vdash A \wedge B$.
(∧E) If $X \vdash A \wedge B$, then $X \vdash A$ and $X \vdash B$.
(∨I) Both $X \vdash A$ and $X \vdash B$ yield $X \vdash A \vee B$.
(∨E) If $Y(A) \vdash C$, $Y(B) \vdash C$ and $X \vdash A \vee B$, then $Y(X) \vdash C$
(Neg) If $A \vdash \neg B$ and $X \vdash B$, then $X \vdash \neg A$

Let us note that the cut rule

(Cut) If $X \vdash A$ and $Y(A) \vdash B$, then $Y(X) \vdash B$

is admissible in every natural deduction system built upon these rules.

Of course, structural rules affect the set of provable consecutions. For example, weakening is essential in the proof of $A \vdash B \to A$:

1. $A \vdash A$ (axiom)
2. $A ; B \vdash A$ (1., K)
3. $A \vdash B \to A$ (2. →I)

Similarly, (CI) is sufficient for $A \vdash (A \to B) \to B$ and (B), (Bc), (WI) are sufficient for $A \to (A \to B) \vdash A \to B$. The choice of structural rules is usually influenced by the *assumed nature* of structures. For example, if structures are seen as *sets*, then all the above structural rules (with the possible exception of (K)) are plausible.[6] If it is assumed in addition that the consequence relation is monotonic, (K) is plausible as well. However, if structures are seen as *multisets*, then (M) and (WI) are no longer plausible. If they are seen as *lists*, then (CI) has to go as well. For more detail see Restall (2000).

Definition 3.2

A substructural *frame* is a tuple $F = (W, R, C, \leq)$ where W is a non-empty set, R is a ternary relation on W, C is a symmetric[7] binary rela-

---

6 The set $\{A, B\}$ is identical with $\{B, A\}$ and $\{A, A, B\}$.

7 Symmetry is assumed since we shall be working with a single negation. In addition, we opt to consider a single implication, but without considering only commutative frames. This is the case since we want our "non-epistemic fragment" of the language to consist of the ordinary Boolean formulas. Symmetry is a natural assumption if C is read

tion on W and $\leq$ is a partial order on W. Moreover, the following conditions are assumed:

If $Rxyz$ and $x' \leq x$, $y' \leq y$, $z \leq z'$, then $Rx'y'z'$.
If Cxy, $x' \leq x$ and $y' \leq y$, then $Cx'y'$.

A *substructural model* is a couple $M = (F, E)$, where E is an *evaluation function* from $W \times (Fm \cup Struct)$ to $\{0, 1\}$ such that:

If $E(x, p) = 1$ and $x \leq y$, then $E(y, p) = 1$
$E(x, A \wedge B) = 1$ iff $E(x, A) = E(x, B) = 1$
$E(x, A \vee B) = 1$ iff $E(x, A) = 1$ or $E(x, B) = 1$
$E(x, A \rightarrow B) = 1$ iff for all y, z: If $Rxyz$ and $E(y, A) = 1$, then $E(z, B) = 1$
$E(y, \neg A) = 1$ iff for all y: Cxy implies $E(y, A) = 0$
$E(y, X ; Y) = 1$ iff there are y,z: $Ryzx$, $E(y, X) = 1$ and $E(z, Y) = 1$

A consecution $X \vdash A$ is valid in M iff $E(x, X) = 1$ implies $E(x, A) = 1$ for all $x \in W$. A consecution $X \vdash A$ is valid in F iff it is valid in every $M = (F, E)$.

We do not give an exposition of the substructural semantics – interested reader is referred to Restall (2000) and Mares (2004).

Lemma 3.3
Let ND be a substructural natural deduction system with a set Γ of structural rules. A consecution $X \vdash A$ is provable in ND iff it is valid in the class of frames that satisfy the conditions corresponding to members of Γ. Some of the corresponding conditions are:

c(B) *If $R(xy)zw$, then $Rx(yz)w$*
c(Bc) *If $Rx(yz)w$, then $R(xy)zw$*
c(CI) *If $Rxyz$, then $Ryxz$*
c(M) *If $Rxxy$, then $x \leq y$*
c(WI) *$Rxxx$*
c(K) *If $Rxyz$, then $x \leq z$*

($R(xy)zw$ means that there is a u such that $Rxyu$ and $Ruzw$, while $Rx(yz)w$ means that there is a u such that $Ryzu$ and $Rxuw$.)

as "consistency", but commutativity is considered to be rather strong. For details, see Restall (2000).

Proof: See Restall (2000, ch. 11).

Definition 3.4
Let Γ be a set of structural rules. A *Γ-frame* is a frame that satisfies every condition corresponding to members of Γ. A *Γ-countermodel* to $X \vdash A$ is a model $M = (F, E)$, where F is a Γ-frame and there is $x \in W$ such that $E(x, X) = 1$ but $E(x, A) = 0$.

Definition 3.5
An *epistemic state s* is a triple (X, Γ, V), where X is a structure, Γ is a set of structural rules and V is a function from P to $\{0,1\}$. *Truth values* of L_1-formulas at states are defined as follows:

$T(s, p) = 1$ iff $V(s, p) = 1$
$T(s, \neg A) = 1$ iff $T(s, A) = 0$
$T(s, A \wedge B) = 1$ iff $T(s, A) = 1$ and $T(s, B) = 1$
$T(s, A \vee B) = 1$ iff $T(s, A) = 1$ or $T(s, B) = 1$
$T(s, A \rightarrow B) = 1$ iff $T(s, A) = 0$ or $T(s, B) = 1$
$T(s, \mathbf{Bel}\, A) = 1$ iff there is a substructure Y of X such that $Y \vdash A$ is Γ-provable and $T(s, B) = 1$ for every formula B in Y.

A formula is *Γ-valid* iff it is true in every $s' = (X', \Gamma, V')$. A formula is *universally* valid iff it is Γ-valid for every Γ.

An epistemic state is given by a structured body of *information* (assumptions) X and an "*environment*" specified by the valuation V. Notice that we construe epistemic states as *syntactic* objects. This is an alternative to the usual construal of states as "sets of possible worlds".

As noted above, the properties of X are partially specified by the structural rules in Γ. It is a BTA belief that A iff there is a body of information Y within X such that *i)* A is inferable from Y using no structural rules other than those in Γ and *ii)* Y consists only of *true* formulas.[8]

Let us note that this approach builds upon Konolige's deductive model of belief, see Konolige (1984), and the usual methods of knowledge representation, see Šefránek (2000), Brachman – Levesque (2004). However, the present framework is a generalisation of these: substruc-

---

[8] The truth condition of **Bel** is the reason why structures ("assumptions") may contain only L_0–formulas. A more generous definition of structures would render the truth condition circular.

tural logics allow us to work with various types of structures and consequence relations. The idea of using substructural logics in modelling epistemic notions is not new, see Bílková et al. (2010) and Sequoiah-Grayson (2009), for example.

4. Properties of BTA belief

This section discusses some of the properties of BTA belief. We begin by pointing out several *universally* valid formulas and rules.

First, BTA belief is factive:

(1) $\mathbf{Bel}\, A \rightarrow A$

The reason is that, no matter what structural rules are assumed, provable consecutions $X \vdash A$ have the following property: If v is a Boolean valuation such that every formula B in X is true with respect to v, then A is true with respect to v as well. This may be easily demonstrated by induction on the complexity of proofs.

Second, BTA belief (in every Γ-state) is closed under Γ-consequence: If $A \vdash B$ is Γ-provable, then $\mathbf{Bel}\, A \rightarrow \mathbf{Bel}\, B$ is Γ-valid.[9] This is a straightforward consequence of the admissibility of (Cut).

Third, BTA belief is closed under "∧ elimination" and "∨ introduction":

(2) $\mathbf{Bel}(A \wedge B) \rightarrow (\mathbf{Bel}\, A \wedge \mathbf{Bel}\, B)$
(3) $(\mathbf{Bel}\, A \vee \mathbf{Bel}\, B) \rightarrow \mathbf{Bel}(A \vee B)$

This is a trivial consequence of the rules (∧E) and (∨I). Note, however, that BTA belief is not necessarily closed under "∧ introduction", since the converse of (2), *i.e.*

(4) $(\mathbf{Bel}\, A \wedge \mathbf{Bel}\, B) \rightarrow \mathbf{Bel}(A \wedge B)$

is not universally valid. For example, consider an epistemic state $s = (X, \Gamma, V)$, where Γ contains only (CI), $X = p\ ;\ q$ and $V(p) = V(q) = 1$. Obviously,

---

[9] Hence, **Bel** may be read as *implicit* belief. Epistemic states may be extended by including a syntactic filter (such as an awareness set), but we shall not do so in the present paper.

Bel p and **Bel** q. However, there is no substructure of X that entails $p \wedge q$: the consecutions $p \vdash p \wedge q$, $q \vdash p \wedge q$ and $p ; q \vdash p \wedge q$ are all clearly invalid.[10] The converse of (3) is not valid either. To see this, it is sufficient to consider a state s such that $X = p \vee q$ and Γ is empty. It is clear that neither $p \vee q \vdash p$, nor $p \vee q \vdash q$ are provable using the empty set of structural rules: there are Γ-countermodels to both consecutions.

Closure under modus ponens

(5) $\quad \mathbf{Bel}(A \to B) \to (\mathbf{Bel}\, A \to \mathbf{Bel}\, B)$

is not universally valid either. Consider an epistemic state $s = (X, \Gamma, V)$, where Γ contains only (CI), $X = (p \to q) ; (r ; p)$ and $V(p) = V(q) = V(r) = 1$. Obviously, **Bel** $(p \to q)$ and **Bel** p. However, there is no substructure of X that entails q. We will provide a countermodel to $(p \to q) ; (r ; q) \vdash q$. (The reader may provide countermodels to consecutions with other substructures of X as an exercise.) Let $W = \{x, y, z\}$. As usual, let C and $\leq$ be identity on W. Assume that $Rxxy$ and $Ryyz$. Now let $E(x, r) = E(x, p) = 1$. Hence, $E(y, r ; p) = 1$. Moreover, let $E(y, p) = 0$. Consequently, $E(y, p \to q) = 1$. Therefore, $E(z, (p \to q) ; (r ; p)) = 1$. But nothing prevents us from having $E(z, q) = 0$.

In general, consider the following epistemic closure schema:

(EC) If $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ is universally valid, then $\mathbf{Bel}\, A_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{Bel}\, A_n \to$ is universally valid.

It is clear that only quite special cases of (EC) are true. For example, if $n = 1$ and $A_1 \vdash B$ is provable without any special structural rules. The latter condition is essential: many consecutions $A \vdash B$, where $A \to B$ is a propositional tautology, are *not* provable without recourse to specific structural rules. In fact, to achieve this was the point of introducing substructural logics.

Moreover, as the failure of closure under "$\wedge$ introduction" (4) demonstrates, (EC) does not hold if $n = 2$, even if $A_1 \wedge A_2 \vdash B$ *is* provable with-

---

[10] A countermodel to the first consecution: Let W be a singleton consisting of x, let C and $\leq$ be identity on W and let $Rxxx$. Obviously, this is a (CI)-frame. Moreover, let $E(x, p) = 1$ and $E(x, q) = 0$. (There is a similar countermodel to the second consecution.) A countermodel to the third consecution: Let W be $\{x, y\}$, let C and $\leq$ be identity on W and let $Rxxy$. Moreover, let $E(x, p) = 1$, $E(x, q) = 1$ and $E(y, p) = 0$. Obviously, $E(y, p ; q) = 1$, but $E(y, p \wedge q) = 0$.

out using any structural rules. In addition, it is plain that propositional tautologies are not universally BTA believed either: for example, $q \vee \neg q$ is a propositional tautology, but it is sufficient to consider a state s where $X = p$. It is plain that $p \vdash q \vee \neg q$ is not provable by using *every* Γ. To sum up, BTA belief does not suffer from many of the notorious omniscience properties.

5. Conclusion

We have outlined a simple formal model of belief that *i*) is based on true assumptions, *ii*) does not suffer from the usual omniscience properties. Moreover, the present framework is rather general: one may concentrate on various types of bodies of information (sets, multisets, lists etc.) and consequence relations (monotonic as well as nonmonotonic).

However, this paper is only an outline of a broader project. Many paths of future research are open. First, this paper does not discuss the problem of *axiomatisation* of the set of universally valid L_1-formulas. A related open problem is proving *correspondence results* for various epistemic formulas. Second, one may attempt to combine the substructural approach with the usual epistemic Kripke semantics and, in addition, to provide multi-agent versions. It is also possible to interpret several extended epistemic languages (possibly containing dynamic or group-epistemic operators) in these combined models. Finally, it is much desired to elaborate the present framework so that it could handle the familiar introspection properties (and formulas with iterated epistemic operators in general). However, these investigations are left for another occasion.

References

ARTEMOV, S. (1994): Logic of Proofs. *Annals of Pure and Applied Logic* 69, 29-59.

ARTEMOV, S. (2001): Explicit Provability and Constructive Semantics. *Bulletin of Symbolic Logic* 7, 1-36.

ARTEMOV, S. (2008): The Logic of Justification. *The Review of Symbolic Logic* 1, 477-513.

ARTEMOV, S. (2011): Why Do We Need Justification Logic? In: van Benthem, J. – Gupta, A. – Pacuit, E. (eds.): *Games, Norms and Reasons: Logic at the Crossroads*. Berlin: Springer, 23-38.

ARTEMOV, S. (2012): The Ontology of Justifications in the Logical Setting. *Studia Logica* 100, 17–30.

BÍLKOVÁ, M. – MAJER, O. – PELIŠ, M. – RESTALL, G. (2010): Relevant Agents. In: Beklemishev, L. – Goranko, V. – Shehtman, V. (eds.): *Advances in Modal Logic 2010*. London: College Publications, 22-38.

BRACHMAN, R. – LEVESQUE, H. (2004): *Knowledge Representation and Reasoning*. San Francisco: Morgan Kaufman Publishers.

FAGIN, R. – HALPERN, J. – MOSES, Y. – VARDI, M. (1995): *Reasoning About Knowledge*. Cambridge, MA – London: MIT Press.

GETTIER, E. (1963): Is Justified True Belief Knowledge? *Analysis* 23, 121-123.

KONOLIGE, K. (1984): *A Deductive Model of Belief and its Logics*. PhD. Thesis. Stanford University.

MARES, E. (2004): *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*. Cambridge: Cambridge UP.

RESTALL, G. (2000): *An Introduction to Substructural Logics*. London and New York: Routledge.

SEQUOIAH-GRAYSON, S. (2009): A Positive Information Logic for Inferential Information. *Synthese* 167, 409-431.

ŠEFRÁNEK, J. (2000): *Inteligencia ako výpočet*. Bratislava: Iris.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 171-186

Epistemický kontextualizmus a jeho motivácia

MARIÁN ZOUHAR[1]

Katedra logiky a metodológie vied. Filozofická fakulta. Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6. 814 99 Bratislava. Slovenská republika
marian.zouhar@gmail.com

ZASLANÝ: 27-11-2012 ▪ AKCEPTOVANÝ: 24-03-2013

Abstract: According to Keith DeRose, the best argument for epistemic contextualism is supplied by communication intuitions ordinary speakers have when evaluating utterances of sentences of the form "S knows that *p*" and "S does not know that *p*". It is claimed that utterances of "S knows that *p*" and "S does not know that *p*" can both be true with respect to the same S and *p* because the speakers of the utterances employ different epistemic standards. The aim of the paper is to show that one can accept this claim as true while denying epistemic contextualism. A handful of possible contenders to epistemic contextualism are given. Thus, the alleged best argument for contextualism has to be supplemented by other arguments to show that epistemic contextualism should be given preference to the other approaches.

Keywords: Context of utterance vs. circumstances of evaluation – epistemic contextualism – epistemic standards – Keith DeRose – variable truth conditions (propositions) vs. stable truth conditions (propositions).

1. Úvod

Výrazy „vedieť" a „poznať" (a ich gramaticky modifikované tvary) budem nazývať *epistemické slovesá*. Vety, v ktorých sa subjektu pripisuje, resp. upiera

[1] Táto stať vznikla na Filozofickej fakulte UK v Bratislave v rámci grantu VEGA č. 1/0046/11 *Sémantické modely, ich explanačná sila a aplikácia*. Chcem poďakovať recenzentovi za pripomienky k predchádzajúcej verzii state.

poznanie (nejakej propozície), budem nazývať *epistemické vety*. Môžeme rozlíšiť *pozitívne* epistemické vety formy „S vie, že *p*" od *negatívnych* epistemických viet formy „S nevie, že *p*", kde S je subjekt a *p* propozícia. To, čo epistemické slovesá zachytávajú, budem označovať termínom *epistemický postoj*; to, že nejaký subjekt vie, resp. nevie, že nejaká propozícia je pravdivá, je teda epistemickým postojom tohto subjektu k propozícii.[2]

Epistemický kontextualizmus tvrdí, že sémantický obsah epistemických slovies je závislý od kontextu, v ktorom sa použijú príslušné epistemické vety.[3] Podľa epistemického kontextualizmu je preto prípustné, aby tvrdenie, ktoré uskutoční hovorca H_1 použitím vety[4]

(1) S vie, že *p*

vzhľadom na svoj kontext K_1, a tvrdenie, ktoré uskutoční hovorca H_2 použitím vety

(2) S nevie, že *p*

vzhľadom na svoj kontext K_2, boli súčasne pravdivé (pričom podstatné je to, že H_1 a H_2 posudzujú epistemický postoj S k *p* vzhľadom na *tú istú* situáciu a berú pri svojom hodnotení do úvahy *tie isté* informácie, ktoré majú o S a danej situácii). To je možné napriek tomu, že vety (1) a (2) z formálneho hľadiska vyzerajú ako vzájomné negácie. Epistemický kontextualista totiž povie, že ak H_1 vyjadrí svojím použitím vety (1) propozíciu P a H_2 zase

---

2 Epistemických postojov existuje, prirodzene, oveľa viac, no v tejto stati ich nebudem spomínať. Budem takisto predpokladať, že aj negatívna epistemická veta vyjadruje epistemický postoj subjektu k propozícii, hoci – ako na to poukázal anonymný recenzent – bolo by korektnejšie povedať, že sa v nej vyjadruje *absencia* takéhoto postoja. Pojem epistemického postoja teda budem používať v takomto širšom zmysle.

3 Niekedy sa používa termín *epistemologický kontextualizmus*, no ten je podľa mňa zavádzajúci. Vzbudzuje totiž dojem, že ide o epistemologickú teóriu, a teda kontextualizmus by vyzeral ako konkurent napríklad fundacionalizmu, koherentizmu, reliabilizmu atď. Kontextualizmus je však teóriou, ktorá patrí do filozofie jazyka, zaoberá sa sémantikou epistemických slovies, a preto bude vhodnejší termín „epistemický".

4 Alternatívne by sme mohli epistemický kontextualizmus formulovať tak, že kým tvrdenie, ktoré jeden hovorca uskutoční použitím vety (1) vzhľadom na jeden kontext, je pravdivé, iné tvrdenie, ktoré hovorca uskutoční použitím *tej istej* vety vzhľadom na iný kontext, je nepravdivé (pozri Cohen 1999, 65). Túto formuláciu kontextualizmu však nebudem používať, keďže sa jej vyhýba aj Keith DeRose, ktorý je v tejto stati kľúčovou postavou.

použitím vety (2) vyjadrí propozíciu Q, tak neplatí, že $Q = \neg P$. To znamená, že rozdiel medzi propozíciami P a Q nie je daný len tým, že v jednej z nich sa vyskytuje negácia. Ak sa dve propozície líšia len tým, že jedna je negáciou druhej propozície, poviem, že sú *vecne totožné*; to znamená, že propozície P_1 a P_2 sú vecne totožné, ak platí, že $P_1 = \neg P_2$ alebo $P_2 = \neg P_1$. Ak dve propozície nie sú vecne totožné, sú *vecne odlišné*.[5] Použitiami viet (1) a (2) vo vhodných kontextoch možno teda vyjadriť vecne odlišné propozície.[6]

Vecnú odlišnosť medzi propozíciami P a Q kontextualista pripíše na vrub rozdielom v sémantických obsahoch epistemického slovesa „vedieť", ktoré toto sloveso nadobúda pri konkrétnych použitiach epistemických viet (1) a (2). Prečo práve tomuto slovu? Nuž preto, tvrdí kontextualista, že v situáciách, v ktorých sa použijú vety (1) a (2), vstupujú do hry rôzne *epistemické štandardy*, ktoré sú súčasťou toho, čo epistemické vety vyjadrujú vzhľadom na dané kontexty použitia. Tento dôležitý pojem vymedzuje jeden z popredných epistemických kontextualistov takto:

> K propozícii, o ktorej je subjekt presvedčený, má subjekt silný [strong] epistemický postoj, ak jeho presvedčenie [belief] o tejto propozícii má do značnej miery vlastnosť alebo vlastnosti, ktoré sú potrebné na to, aby pravdivé presvedčenie bolo poznatkom [a piece of knowledge]. ‚Epistemické štandardy', ktoré sú stanovené kontextom, sa týkajú toho, aký silný epistemický postoj musí subjekt mať k propozícii..., aby bola pravdivá veta, ktorá mu pripisuje ‚poznanie' v danom kontexte. (DeRose 2011, 7)

Zjednodušene povedané, epistemické štandardy predstavujú požiadavky, ktoré musí pravdivé presvedčenie, ktoré subjekt má, splniť, aby ho mohol hovorca považovať za poznatok (vzhľadom na svoj kontext). Na spresnenie dodávam, že epistemické štandardy nie sú zdôvodnením či evidenciou, ktorú *subjekt* má k dispozícii v prospech svojho presvedčenia (a na ktorej základe on sám dané presvedčenie považuje za poznatok), ale sú to kritériá, ktoré sú určené *hovorcom* (a jeho kontextom), ktorý posudzuje, či daný subjekt vie, alebo nevie. Inými slovami, epistemické štandardy sú v podstate kritériom,

---

[5] Podobne budem používať termín *vecne odlišné pravdivostné podmienky*.

[6] Pojem vecnej totožnosti propozícií by sa dal definovať aj všeobecnejšie, no na účely tejto state to nie je potrebné, keďže iné možné prípady vecnej totožnosti, ktoré nie sú zachytené v definícii uvedenej v texte, nás nebudú zaujímať.

vzhľadom na ktoré sa posudzuje, či subjektova evidencia v prospech jeho (pravdivého) presvedčenia postačuje (z hovorcovej perspektívy) na to, aby hovorca toto presvedčenie považoval za poznatok.[7] V jednom kontexte môžu byť tieto štandardy benevolentnejšie ako v inom kontexte, a teda za poznatok sa môže v jednom prípade považovať také pravdivé presvedčenie, ktoré by sa v druhom prípade za poznatok nepovažovalo. Keď preto v prvom kontexte hovorca H_1 vysloví vetu (1), povie niečo pravdivé, no niečo pravdivé povie aj hovorca H_2, keď vzhľadom na druhý kontext vysloví vetu (2) (pričom, opakujem, H_1 a H_2 hodnotia epistemický postoj S k *p* vzhľadom na tú istú situáciu a zohľadňujú tie isté informácie, ktoré majú o S a danej situácii).

Vezmime si na ilustráciu príklad, ktorý je inšpirovaný J. L. Austinom (pozri Austin 1979, 108) a ktorý v určitých modifikáciách používajú aj epistemologickí kontextualisti (pozri DeRose 2011, 4-5). Budeme uvažovať o dvoch kontextoch K_1 a K_2, v ktorých hovorcovia vyhodnocujú postoj subjektu k istej propozícii. Celý príklad načrtnem len schematicky, bez beletristických detailov (ktoré by azda mali vzbudzovať väčšiu dôveryhodnosť príkladu).[8]

> **Pozadie**: Osoby A a B vedia, že ich kolega C nosieva do práce klobúk, ktorý vždy odkladá na určitý vešiak. V určitý deň A a B vidia, že na vešiaku je klobúk C. V práci ho však osobne nestretli a nemajú k dispozícii ani žiadnu inú spoľahlivú správu o tom, či C v práci naozaj bol. Prítomnosť klobúku je teda pre nich jedinou relevantnou evidenciou.
>
> **Kontext K_1**: V tomto kontexte, v ktorom sú štandardy poznania relatívne nízke, sa A rozpráva s osobou D. Môžeme si predstaviť, že D je manžel B a zároveň dobrý priateľ A, pričom má podozrenie, že ho manželka

---

[7] V limitnom prípade sa môže stať, že hovorca je totožný so subjektom. Kontextualisti o takýchto prípadoch niekedy uvažujú (pozri DeRose 2011, 1-3). Lenže ani v tomto prípade nemožno zamieňať zdôvodnenie alebo evidenciu, ktorú má subjekt v prospech svojho pravdivého presvedčenia, s epistemickými štandardmi, podľa ktorých posudzuje, či vie, alebo nevie (a teda sám sebe pripisuje alebo upiera poznanie). Takéto „sedenie na dvoch stoličkách" však môže úvahy skomplikovať a zatemniť, a preto budem rozlišovať subjekt poznania a hovorcu. Na niektoré problémy, ktoré vznikajú, ak subjekt poznania je totožný s hovorcom, upozorňuje aj K. Bach; pozri Bach 2005a, 56, pozn. 5).

[8] DeRose kladie mimoriadny dôraz na to, aby sa príklady, ktoré majú ilustrovať nejakú teóriu, formulovali čo najstarostlivejšie. Musia byť presvedčivé a musia byť formulované tak, aby vyzerali ako bežná jazyková komunikácia medzi bežnými hovorcami. V podstate takmer celá druhá kapitola knihy DeRose (2011) má za cieľ nájsť čo najlepšie príklady ilustrujúce kontextualizmus.

(t. j. osoba B) podvádza s C. Z určitého dôvodu chce vedieť, či B vedela, či C je v práci.[9] Na túto otázku A odpovie, že B vedela, či C bol v práci (keďže B videla – spolu s A – klobúk na vešiaku).

Kontext K_2: V tomto kontexte, v ktorom sú štandardy poznania relatívne vysoké, sa A rozpráva s osobu E. Môžeme si predstaviť, že E je vyšetrovateľ, ktorý zisťuje, či C, ktorý je podozrivý z vraždy, bol v určitom čase v práci, aby overil jeho alibi. A odpovie, že nevie, či bol C v práci, hoci na vešiaku visel jeho klobúk, no osobne ho nestretol. E sa takisto pýta, či by B mohla potvrdiť alibi C, no A odpovie, že ani B nevedela, či C bol v práci, keďže mala k dispozícii len takú evidenciu, o akej vedel aj hovorca A.[10]

Môžeme zanedbať skutočnosť, že s D sa A rozprával v inom čase ako s E, keďže medzičasom sa evidencia A ani B v prospech toho, či C bol v práci, nijako neobohatila ani neochudobnila. V K_1, v ktorom sú epistemické štandardy pomerne nízke, môžeme považovať za pravdivé tvrdenie, ktoré A uskutoční použitím vety

(3) B vedela, či C bol v práci,

kým v K_2, v ktorom sú epistemické štandardy postavené vyššie, zase môžeme považovať za pravdivé tvrdenie, ktoré A uskutoční použitím vety

(4) B nevedela, či C bol v práci.

Vety (3) a (4) môžeme považovať za špecifickejšie verzie viet (1), resp. (2), a teda ilustrujú kontextualistickú tézu o závislosti pripísania pravdivostných hodnôt od kontextu použitia.[11]

---

[9] V tomto príklade sa používa gramaticky korektnejšie spojenie „vedieť, či“, nie spojenie „vedieť, že“. Vecne sa však na tejto úvahe nič nemení, pretože vetu „S vie, či *p*“ môžeme považovať za synonymum vety „S vie, že *p*, alebo S vie, že *non-p*“, kde sa vyskytuje väzba „vedieť, že“.

[10] Nechcem, aby vznikol dojem, že existujú len dva druhy epistemických štandardov – vysoké a nízke (resp. relatívne vysoké a relatívne nízke štandardy). V skutočnosti ich je veľa, možno neobmedzene veľa.

[11] Extrémny prípad by zrejme predstavovali skeptické epistemické štandardy, ktoré sú príliš vysoké na to, aby sme našli väčší počet takých viet formy (1), ktoré by sa považovali za pravdivé.

2. Argument

V predchádzajúcej časti som uviedol len základnú formuláciu a jednoduchú ilustráciu epistemického kontextualizmu. Pozitívnu evidenciu v jeho prospech som zatiaľ nespomenul. DeRose uvádza ako najdôležitejší argument potvrdzujúci epistemický kontextualizmus skutočnosť, že bežní používatelia rozumejú epistemickým vetám presne tak, ako to kontextualizmus opisuje:[12]

> Najlepšie dôvody v prospech kontextualizmu pochádzajú z toho, ako sa vety, ktorými sa pripisuje (upiera) poznanie, používajú v bežnej nefilozofickej reči: To, čo by bežní hovorcovia považovali v niektorých nefilozofických kontextoch za ‚poznanie', by v iných kontextoch ako ‚poznanie' odmietli. (DeRose 2011, 47)

Modelové príklady, ktoré som uviedol, tak slúžia nielen na ilustráciu myšlienky epistemického kontextualizmu, ale možno ich ľahko transformovať aj na jeden z najdôležitejších argumentov v jeho prospech. Samozrejme, bude to platiť v prípade, že tieto príklady opisujú, ako by sa zachovali bežní „nefilozofickí" používatelia jazyka, ktorí by mali vyhodnotiť pravdivostné hodnoty tvrdení uskutočnených použitím epistemických viet vzhľadom na svoje kontexty v zhode so svojimi *intuíciami*, ktoré majú ako *kompetentní* hovorcovia (ktorí sú navyše nezaťažení filozofickými predsudkami rozličných druhov). Ako zdôrazňuje DeRose, „[o]dvolávame sa tu na to, ako my, kompetentní hovorcovia intuitívne vyhodnocujeme pravdivostné hodnoty konkrétnych tvrdení uskutočnených... v konkrétnych situáciách" (DeRose 2011, 49).

To sú vstupné údaje, ktoré epistemologický kontextualista berie do úvahy vo svojej argumentácii a vyvodzuje z nich svoje závery. Premisami jeho argumentácie sú teda tieto dve tvrdenia:

P1. Hovorca H_1 vyskytujúci sa v kontexte K_1, v ktorom platia relatívne nízke štandardy poznania, usúdi na základe svojich informácií o sub-

---

[12] DeRose si argument tohto druhu, zdá sa, vysoko cení, keďže „poskytuje najlepšie dôvody, ktoré máme v prospech kontextualizmu nielen v prípade viet pripisujúcich poznanie, ale, domnievam sa, je tou najlepšou evidenciou, ktorá môže o *ľubovoľnom* výraze z bežného jazyka ukázať, že má kontextovo citlivé pravdivostné podmienky" (DeRose 2011, 48). Ako sa pokúsim ukázať v tejto stati, tento optimizmus nezdieľam v prípade epistemických viet; na iných miestach som spochybnil využitie takýchto údajov aj pri výrazoch iného druhu; pozri Zouhar (2009), (2010, 271-312), (2011).

jekte S a jeho postoji k propozícii *p*, ktorý si S utvoril na základe dostupnej evidencie E, že S vie, že *p*, t. j. H_1 považuje tvrdenie uskutočnené použitím vety „S vie, že *p*“ za pravdivé vzhľadom na K_1.

P2. Hovorca H_2 vyskytujúci sa v kontexte K_2, v ktorom platia relatívne vysoké štandardy poznania, usúdi na základe *tých istých* informácií o subjekte S a jeho postoji k propozícii *p*, ktorý si S utvoril na základe *tej istej* dostupnej evidencie E, že S nevie, že *p*, t. j. H_2 považuje tvrdenie uskutočnené použitím vety „S nevie, že *p*“ za pravdivé vzhľadom na K_2.

To znamená, že podľa štandardov, ktoré vo svojom kontexte uplatňuje H_1, je evidencia E, ktorá podmieňuje epistemický postoj S k *p*, postačujúca na to, aby sa tento postoj klasifikoval ako poznanie, kým podľa štandardov, ktoré vo svojom kontexte uplatňuje H_2, nestačí tá istá evidencia v tej istej situácii na to, aby S mal poznanie. H_1 a H_2 uskutočňujú toto posúdenie v zhode so svojimi intuíciami na základe dostupných relevantných informácií (opakujem, že obaja majú tie isté informácie o S a jeho situácii). Treťou premisou argumentu je konštatovanie, ktoré epistemický kontextualista musí akceptovať bez akýchkoľvek výhrad, keďže je fakticky formuláciou jeho doktríny:

P3. Keďže dvaja kompetentní používatelia jazyka H_1 a H_2 vyhodnotia (v zhode so svojimi intuíciami, ktoré majú ako bežní kompetentní používatelia jazyka) obe tvrdenia uskutočnené použitím viet „S vie, že *p*“ a „S nevie, že *p*“ v zodpovedajúcich kontextoch ako pravdivé, tak tvrdenie uskutočnené použitím vety „S vie, že *p*“ v prvom kontexte má *vecne* odlišné pravdivostné podmienky ako tvrdenie uskutočnené použitím vety „A nevie, že *p*“ v druhom kontexte.

Z premís P1 – P3 môžeme odvodiť záver Z:

Z. Tvrdenie uskutočnené použitím vety „S vie, že *p*“ v prvom kontexte má *vecne* odlišné pravdivostné podmienky ako tvrdenie uskutočnené použitím vety „A nevie, že *p*“ v druhom kontexte.

V premise P3 a závere Z sa vyskytuje termín „pravdivostné podmienky“,[13] ktorý DeRose používa pomerne často v podobných súvislostiach, no

[13] Čitateľ zrejme postrehol, že odvodenie tohto záveru vyžaduje zamlčanú premisu, podľa ktorej obaja kompetentní používatelia jazyka vyhodnotia tvrdenia uskutočnené

treba dodať, že namiesto pravdivostných podmienok hovorí pomerne často aj o *sémantickom obsahu* či o *vyjadrenej propozícii*. Na viacerých miestach konštatuje, že sa v závislosti od kontextu použitia mení *obsah* viet použitých v daných situáciách (pozri napríklad DeRose 2011, 3, 8-9, 20, 34, 36, 133 atď.). Ak obsahom vety (vzhľadom na kontext jej použitia) je propozícia, tak možno povedať, že propozícia vyjadrená použitím vety „S vie, že *p*" v prvom kontexte je vecne odlišná od propozície vyjadrenej použitím vety „S nevie, že *p*" v druhom kontexte. Možno uzavrieť, že DeRose nerobí rozdiel medzi pravdivostnými podmienkami a sémantickým obsahom, resp. propozíciou, a že skôr pod týmito označeniami rozumie to isté.

V tejto stati sa nezameriam primárne na posúdenie a zhodnotenie epistemického kontextualizmu ako určitej teórie významu epistemických slov, ale pokúsim sa kriticky vyhodnotiť argument, ktorý DeRose považuje za „najlepší v prospech kontextualizmu". Kľúčovým aspektom tohto argumentu je odkaz na intuície, ktorými disponuje kompetentný používateľ jazyka, keď vo svojej výpovedi použije epistemickú vetu, resp. je adresátom výpovede, v ktorej sa použila epistemická veta. Bude nás teda zaujímať, či takéto intuície naozaj postačujú na to, aby sme získali zaujímavé závery týkajúce sa sémantických teórií a či stačia na to, aby sme mohli odlíšiť (prijateľný) kontextualizmus od (neprijateľného) invariatizmu.[14]

použitím viet „S vie, že *p*" a „S nevie, že *p*" v daných kontextoch ako pravdivé *bez toho, aby si vzájomne protirečili*. Zo zadania ilustračných príkladov, ktoré epistemickí kontextualisti uvádzajú na podporu svojej koncepcie, je zrejmé, že sa táto vec predpokladá. Keby sa takýto predpoklad neprijal, kontextualistický záver by nevyplynul. Keďže ide o samozrejmú požiadavku, nekomplikoval som ňou výklad v hlavnom texte, ale presunul som ju len do tejto poznámky pod čiarou.

[14] *Invariantizmus* je štandardnou opozíciou voči kontextualizmu. Podľa invariantizmu vyjadrujú všetky tvrdenia uskutočnené použitím tej istej epistemickej vety ten istý sémantický obsah (propozíciu) a majú tie isté pravdivostné podmienky, a to nezávisle od kontextu použitia epistemickej vety. Dôsledkom je to, že ak jeden hovorca povie, že výpoveď uskutočnená použitím vety „S vie, že *p*" je pravdivá, tak výpoveď uskutočnená použitím vety „S nevie, že *p*" (napríklad v našich modelových situáciách) musí byť nepravdivá (alebo naopak). Kontextualista vyhodnocuje takýto záver ako tvrdenie, ktoré je v rozpore s evidenciou, a preto invariantizmus nie je podľa neho prijateľnou alternatívou (pozri napríklad DeRose 2011, 51, 89 a inde). Ak za invariantizmus budeme považovať každú teóriu, ktorá tvrdí, že sémantický obsah vety „S vie, že *p*" zostáva vo všetkých kontextoch nezmenený, dostaneme široké spektrum koncepcií, z ktorých niektoré dokonca môžu vysvetliť aj empirickú evidenciu, ktorú kontextualizmus uvádza vo svoj prospech. Obhajcami klasickejších foriem invariantizmu sú napríklad Bach (2005a), Rysiew (2001),

Klasický argument proti využívaniu komunikačných intuícií kompetentných používateľov jazyka v sémantike formuloval K. Bach (pozri Bach 2002). Bach v zásade tvrdí, že sa nijako nedá povedať, že takéto intuície sú *sémanticky* relevantné. Nemusia totiž poukazovať na nič, z čoho by sme mohli vyvodzovať sémantické závery. Keďže sme ich zaznamenali pri aktuálnom používaní jazyka, môže ísť skôr o intuície, ktoré sa týkajú *pragmatickej* roviny používania jazyka. Hybnou silou kontextualizmu (vrátane epistemického kontextualizmu) je teda (okrem iného) pojmový zmätok, ktorý pramení z nerozlišovania pojmov patriacich do rozličných sfér (k tomu pozri aj Bach 2005b). Vo svojich úvahách však budem postupovať inak a hoci akceptujem Bachove argumenty aj závery v tejto otázke, nevyužijem ich proti uvedenému argumentu. Moja argumentácia nebude spočívať ani v tom, že by som poukazoval na prípady, v ktorých takýto prístup vedie k chybným predikciám v tom zmysle, že by nesprávne vyhodnocoval pravdivostné hodnoty niektorých tvrdení (a teda tvrdenie, ktoré by sa malo považovať za pravdivé, sa v konečnom dôsledku ukáže ako nepravdivé, resp. naopak). V literatúre sa možno stretnúť aj s takýmito argumentmi a za všetky z nich odkážem len na výbornú štúdiu D. Zemana; pozri Zeman (2011). Nebudem poukazovať ani na to, že epistemický kontextualizmus stojí na neadekvátnej koncepcii jazyka, konkrétne na chybnej syntaxi a sémantike epistemických slovies. Poukazuje na to napríklad J. Stanley, keď zdôrazňuje určité zásadné odlišnosti medzi týmito slovesami a výrazmi, ktoré sa bežne považujú za kontextovo citlivé; pozri Stanley (2004). Zameriam sa skôr na to, že údajný najlepší argument v prospech epistemického (a v podstate akéhokoľvek iného) kontextualizmu nie je v skutočnosti až taký úspešný, ako by sa mohlo zdať z optimizmu, ktorý vyvoláva medzi prívržencami kontextualizmu.

3. Medzera v argumente

Problém, ktorý vzniká v súvislosti s argumentom z predchádzajúcej časti, spočíva v tom, že aj keď pripustíme, že jeho premisy P1 a P2 sú pravdivé, ešte to neznamená, že musíme akceptovať aj epistemický kontextualizmus ako (jedinú) prijateľnú koncepciu. Dôvodom je skutočnosť, že javy, ktoré

Schiffer (1996) atď. Z istého hľadiska však môžeme ako invariantistické koncepcie klasifikovať aj *subjektovo citlivý invariantizmus* (pozri najmä Stanley 2005), *relativizmus* (pozri napríklad MacFarlane 2005, 2007a) alebo dokonca tzv. *neindexický kontextualizmus* (pozri MacFarlane 2007b, 2009).

sa spomínajú v premisách P1 a P2 argumentu, sa dajú vysvetliť aj pomocou iných koncepcií, ako je kontextualizmus, a teda sa ukáže, že premisa P3 je nepravdivá. Ak teda DeRose hodnotí spomínaný argument ako najlepší v prospech epistemického kontextualizmu, prejavuje sa ako príliš veľký optimista, keďže sa týmto argumentom ešte nevylúčili všetky *potenciálne* konkurenčné teórie.

Zhrňme si podstatné fakty: Faktom je, že ak určitý subjekt S má k dispozícii určitú evidenciu v prospech propozície *p*, tak jeden hovorca môže na základe svojich epistemických štandardov povedať, že S vie, že *p*, kým druhý hovorca môže vzhľadom na svoje epistemické štandardy zase povedať, že S nevie, že *p*. Nesporným faktom je aj to, že situácie tohto druhu nie sú žiadnou exotickou raritou, ale môžeme sa s nimi stretnúť pravidelne a pomerne často, keďže nároky, ktoré kladieme na poznanie, sú v bežných prípadoch značne nestále. Vďaka tomu môžeme povedať, že to, čo sa tvrdí v premisách argumentu, sú nespochybniteľné fakty a bolo by zásadnou teoretickou chybou, keby sme sa ich pokúsili ospravedlniť či obísť nejakými teoretickými úskokmi, alebo dokonca slepo ignorovať.

Nemám v úmysle ignorovať ani ospravedlňovať tieto fakty, ale zároveň sa domnievam, že ešte nedokazujú, že tvrdenia, ktoré sa uskutočnia použitím viet „S vie, že *p*" a „S nevie, že *p*" (vzhľadom na zodpovedajúce kontexty použitia a epistemické štandardy, ktoré sú nimi určené), vyjadrujú propozície, ktoré sa od seba *vecne* líšia. O čo ide? Epistemický kontextualista nás chce presvedčiť o tom, že pripísanie určitých pravdivostných hodnôt istým vhodne zvoleným tvrdeniam – pričom toto pripísanie robia kompetentní používatelia jazyka na základe svojich intuícií – ukazuje, že sémantický obsah týchto tvrdení je kontextovo citlivý, t. j. to, čo tieto tvrdenia vyjadria, vraj závisí od kontextu použitia, a teda by sa mohlo stať, že tá istá veta vyjadrí rôzne propozície vzhľadom na rôzne kontexty použitia, v ktorých sa uplatňujú rôzne epistemické štandardy. Súvislosť medzi pripísaním pravdivostných hodnôt tvrdeniam a kontextovej závislosti vyjadreného obsahu sa tu však skôr predpokladá, no nedokazuje sa. V tom spočíva kľúčová medzera v predloženom argumente v prospech epistemického kontextualizmu – ide zamlčaný predpoklad, ktorý sa nijako nezdôvodnil.

Konkurenčná teória, ktorá by rešpektovala tie isté fakty, o aké sa opiera kontextualizmus, by zároveň konštatovala, že sémantický obsah epistemických viet zostáva stabilný vzhľadom na akékoľvek kontexty použitia. Propozícia, ktorú epistemická veta vyjadrí vzhľadom na kontext použitia, nejako zahŕňa podľa kontextualizmu aj epistemické štandardy stanovené daným kontextom použitia a vďaka tomu v kontextoch s rôznymi štandardmi bude vyjadrovať rôzne propozície.[15] Lenže nie je nevyhnutné zahŕňať tieto štandardy priamo do vyjadrených propozícií. Ak teda odoláme tomuto pokušeniu, dostaneme koncepciu, ktorá nebude medzi zložky propozície zaraďovať epistemické štandardy, ale rezervuje pre ne nejaké iné miesto; takáto koncepcia nebude kontextualistická, ale, naopak, zaradí sa do invariantistického prúdu, hoci aj naďalej – na rozdiel od mnohých iných invariantistických teórií – bude rešpektovať fakty, ktoré boli hybnou silou kontextualizmu, a nebude ich ani ospravedlňovať, ani obchádzať.

Z nášho hľadiska je podstatná skutočnosť, ktorú som v predchádzajúcej časti spomenul len akoby mimochodom. Naznačil som, že DeRose formuluje kontextualizmus raz tak, že epistemická veta (resp. jej použitia) majú *variabilné pravdivostné podmienky*, inokedy zase tak, že má *variabilný sémantický obsah*. Takýto spôsob vyjadrovania si môžeme korektne dovoliť len vtedy, keď akceptujeme, že pravdivostné podmienky a sémantický obsah (vyjadrená propozícia) je to isté, alebo vtedy, keď budeme tvrdiť, že pravdivostné podmienky vety, resp. jej použitia, sú jednoznačne a výlučne určené len jej sémantickým obsahom (ktorý vyjadruje vzhľadom na kontext jej použitia). Ani jednu z týchto téz o vzťahu medzi pravdivostnými podmienkami a sémantickým obsahom však prijať nemusíme, a predsa dokážeme vysvetliť fakty, o ktoré sa opiera kontextualizmus. Môžeme povedať, že epistemická veta vyjadruje ten istý sémantický obsah vzhľadom na akýkoľvek kontext jej použitia, ale zároveň môžeme uznať, že sa menia pravdivostné hodnoty toho istého sémantického obsahu v závislosti od toho, ako sa menia epistemické štandardy relevantné pre dané kontexty použitia. To by znamenalo, že vzhľadom na rôzne kontexty použitia sa menia pravdivostné podmienky danej vety (keďže epistemické štandardy sú súčasťou pravdivostných podmienok). Ak teda oddelíme pravdivostné podmienky od sémantického obsahu, umožníme variabilitu jednej veci bez toho, aby sa ohrozila stabilita druhej veci. Dostaneme tak verziu invariantizmu, ktorá má zároveň dostatočne citlivý prístup k empirickým faktom, ktoré motivovali kontextualizmus.

---

15 Zásadná otázka pre kontextualizmus znie, ako sa majú epistemické štandardy stať súčasťou vyjadreného obsahu. Odpoveď na túto otázku robí z kontextualizmu *sémantickú* teóriu. O to zarážajúcejšie je to, že DeRose na túto otázku odpovedať *odmieta*. Ba dokonca kritizuje S. Schiffera za to, že v stati Schiffer (1996) analyzuje (a odmieta) niektoré možnosti, ktoré kontextualista má k dispozícii. V tejto stati sa nebudem venovať podrobnostiam, len spomeniem, že so Schifferovou argumentáciou sa v zásade stotožňujem.

4. Alternatívny prístup

Najlepším ťahom v argumentácii proti kontextualizmu bude azda načrtnutie alternatívneho vysvetlenia tých istých jazykových javov, ktoré boli motiváciou vzniku kontextualizmu. To by znamenalo, že medzera v argumentácii, na ktorú som poukázal v predchádzajúcej časti, by bola fatálnou chybou v celej kontextualistickej stavbe, keďže sa ukáže, že je možné prijať premisy kontextualistického argumentu ako pravdivé, no odmietnuť jeho záver.

Teórie, ktoré vyhovujú tejto požiadavke, sa v literatúre z času na čas objavujú. Túto požiadavku spĺňa napríklad *situovaný minimalizmus* E. Corazzu a J. Dokica (pozri Corazza – Dokic 2007),[16] *minimálny indexikalizmus*, ktorý som predložil v knihe Zouhar (2011),[17] *neindexický kontextualizmus* od J. MacFarlana (pozri MacFarlane 2009),[18] ale aj rôzne verzie *relativizmu*. Už len rozmanitosť označení týchto teórií vyvoláva dojem, že premisy kontextualistického argumentu umožňujú fakticky značne rozvetvenú rodinu koncepcií.[19]

---

[16] Situovaný minimalizmus nebol primárne navrhnutý na to, aby sa zaoberal sémantickým obsahom epistemických slovies a epistemických viet, ale neexistujú žiadne principiálne prekážky proti tomu, aby sme túto koncepciu aplikovali aj na takéto prípady.

[17] Minimálny indexikalizmus sa takisto primárne nezaoberal epistemickými slovesami a epistemickými vetami. Jeho súčasťou je však aj aparát, ktorý zdieľa s inými spomínanými teóriami, a tento aparát sa dá úspešne aplikovať aj na epistemické výrazy.

[18] Názov „neindexický kontextualizmus" treba brať s veľkou rezervou, keďže nejde o kontextualizmus v takom zmysle, v akom sa toto označenie bežne v literatúre používa. To, čo sa v literatúre bežne označuje termínom „kontextualizmus", je podľa MacFarlana *indexický* kontextualizmus, keďže epistemické slovesá fakticky považuje za indexické výrazy, ktorých sémantický obsah sa mení od jedného kontextu k inému kontextu použitia. MacFarlane však chce zachovať stabilnosť sémantického obsahu epistemických slovies, a teda odmieta proklamovanú indexickosť týchto výrazov. Neindexický kontextualizmus je neindexický v tom zmysle, že sémantický obsah epistemických slovies zostáva stabilný, ale zároveň ide podľa MacFarlana o kontextualizmus, keďže táto koncepcia umožňuje zmenu pravdivostných hodnôt epistemických viet (v závislosti od kontextu použitia). Osobne by som povedal, že ide preto o verziu relativizmu (nie kontextualizmu), ale radšej sa takéhoto vyjadrenia zdržím, keďže pod relativizmom MacFarlane zase rozumie niečo iné.

[19] Jednoducho povedané, v názvoch filozofických teórií panuje všeobecný chaos a čitateľ urobí najlepšie, keď nebude predpokladať, že za tými istými výrazmi sa skrývajú aj tie isté pojmy.

Prístup, ktoré tieto koncepcie umožňujú, si môžeme ilustrovať na základe jednej analógie. V intenzionálnej sémantike sa považuje za samozrejmosť, že pravdivostná hodnota *kontingentných* výrokov je závislá od možného sveta, prípadne možného sveta a času (v rámci temporálnych intenzionálnych sémantík). To, ktorý možný svet máme vziať do úvahy pri vyhodnocovaní pravdivostnej hodnoty kontingentnej vety, nie je určené sémantickým obsahom tejto vety, ale ide o akýsi externý parameter. Vyhodnotenie pravdivostnej hodnoty propozície vyjadrenej vetou

(5) Mesiac je jedinou obežnicou Zeme,

pričom toto vyhodnotenie budeme relativizovať vzhľadom na možný svet W, nie je to isté ako vyhodnotenie pravdivostnej hodnoty propozície vyjadrenej vetou

(6) Mesiac je jedinou obežnicou Zeme vo W,

kde je zodpovedajúci modálny parameter súčasťou vyjadrenej propozície. Kým prvá veta je kontingentná, druhá veta kontingentná v skutočnosti nie je, keďže vzhľadom na akýkoľvek možný svet sa jej pravdivostná hodnota nemení (je totiž závislá len od toho, či vo W je Mesiac jedinou obežnicou Zeme). Kým v prípade prvej vety bude vyjadrená propozícia pravdivá len vzhľadom na tie možné svety, v ktorých Mesiac je jedinou obežnicou Zeme, v prípade druhej vety bude vyjadrená propozícia pravdivá v akomkoľvek možnom svete, pokiaľ vo svete W je Mesiac jedinou obežnicou Zeme. Tento prístup, ktorý sa v rámci intenzionálnych sémantík považuje za neproblematický, možno ľahko rozšíriť aj na prípad epistemických viet, ak sa umožní, aby sme k modálnemu parametru mohli pridať aj ďalšie parametre.[20]

---

[20] To je prístup, ktorý sa uplatňuje v rôznych verziách relativizmu. Relativizmus nedávno zažil sústredený útok od H. Cappelena a J. Hawthorna, ktorí obhajujú monadický pojem pravdivosti ako základný (nedefinovaný) pojem, kým relativizmus monadický pojem pravdivosti nahrádza relativizovanými pojmami; pozri Cappelen – Hawthorne (2009). Tento útok však môžeme ignorovať, pretože Cappelen a Hawthorne odmietajú aj kontingentnosť propozícií explikovať ako závislosť pravdivostnej hodnoty od možných svetov – propozícia je kontingentná, ak svoju monadickú pravdivosť (resp. nepravdivosť) môže stratiť; pozri Cappelen – Hawthorne (2009, 3-4). Lenže v tejto stati mi ide o to, že *ak* intenzionálne chápanie kontingentnosti je prijateľné, *tak* prijateľné môže byť aj vysvetlenie kontextualistických faktov, ktoré ponúkajú niektoré nekontextualistické teórie.

V ďalšom výklade nám pomôže, ak odlíšime *kontext použitia* od *okolností ohodnotenia*, ako to robí D. Kaplan (pozri Kaplan 1989). Zjednodušene povedané, kontext použitia dodáva propozičné zložky, t. j. zásobuje propozíciu vyjadrenú vetou vzhľadom na daný kontext, kým okolnosti ohodnotenia obsahujú parametre ovplyvňujúce pravdivostnú hodnotu propozície. Ak veta obsahuje indexický výraz, hodnota indexického výrazu – kaplanovsky povedané, *obsah* indexického výrazu – je určený na základe kontextu použitia; pravdivostná hodnota takejto vety (spolu s daným obsahom indexického výrazu) sa však relativizuje vzhľadom na okolnosti ohodnotenia. Možné svety sú jedným parametrom, ktorý patrí medzi okolnosti ohodnotenia, no nikde nie je povedané, že má ísť o *jediný* parameter. Všetky teórie, ktoré som spomenul na začiatku tejto časti, v podstate robia to, že medzi okolnosti ohodnotenia zaradia aj epistemické štandardy.

Porovnajme to s epistemickým kontextualizmom: Podľa kontextualizmu sa epistemické štandardy stávajú súčasťou sémantického obsahu, ktorý veta vyjadruje vzhľadom na kontext použitia, keďže sú súčasťou kontextu použitia epistemickej vety a z neho sa dodávajú do propozície jej zložky; podľa alternatívneho prístupu nie sú epistemické štandardy súčasťou kontextu použitia epistemickej vety, ale patria medzi okolnosti jej ohodnotenia, a teda zostávajú mimo vyjadrenej propozície.

Domnievam sa, že tento výsledok je žiaduci už len z toho dôvodu, že umožní zachovať závislosť epistemických viet od epistemických štandardov podobným spôsobom, ako situovanie modálneho parametra medzi okolnosti ohodnotenia umožňuje zachovať kontingentný charakter kontingentných viet. Keby sme modálny parameter zaradili do kontextu použitia, možný svet, v ktorom by sa daná veta použila, by sa stal súčasťou vyjadrenej propozície. Tak by sa stalo, že použitím vety (5) v možnom svete W by sa vyjadrila propozícia, *že Mesiac je jedinou obežnicou Zeme vo W*. Lenže táto propozícia kontingentná nie je, keďže bez ohľadu na to, ako sa veci majú v ľubovoľnom možnom svete W*, bude (vo W*) pravdivá, ak vo W je Mesiac jedinou obežnicou Zeme. Keby teda veta (5) vyjadrila túto propozíciu, nemohlo by ísť o kontingentnú vetu. Ak však možný svet je len parametrom okolností ohodnotenia, použitím vety (5) propozíciu, *že Mesiac je jedinou obežnicou Zeme vo W*, nevyjadríme (hoci ju vyjadríme použitím vety (6), no to je v tomto prípade irelevantné), a teda veta (5) zostáva kontingentnou.

Analogicky, keby epistemické štandardy mali byť súčasťou kontextu použitia, stalo by sa, že použitím vety

(7) S vie, že Mesiac je jedinou obežnicou Zeme

by sme vyjadrili propozíciu, *že S vie podľa E, že Mesiac je jedinou obežnicou Zeme*, kde E sú príslušné epistemické štandardy. Lenže táto propozícia nie je citlivá vzhľadom na epistemické štandardy, pretože bez ohľadu na to, aké epistemické štandardy E* budú relevantné v danej situácii, bude pravdivá, ak S vie, že Mesiac je jedinou obežnicou Zeme, podľa štandardov E. Keby sa teda použitím vety (7) mala vyjadriť táto propozícia, nemohlo by viac ísť o vetu, ktorá by bola citlivá na epistemické štandardy. Ak však epistemické štandardy sú len parametrom okolností ohodnotenia, použitím vety (7) propozíciu, *že S vie podľa E, že Mesiac je jedinou obežnicou Zeme*, nevyjadríme, a teda (7) zostáva vetou, ktorá bude citlivá na epistemické štandardy.

5. Záver

Alternatívny prístup k epistemickému kontextualizmu som len načrtol v pomerne hrubých rysoch. Detaily možno dopracovať podľa toho, či sa vyberieme cestou situovaného minimalizmu alebo cestou minimálneho indexikalizmu, či cestou neindexického kontextualizmu a podobne. To však nie je v tejto stati podstatné. Mojím cieľom totiž nebolo argumentovať v prospech niektorej z týchto možností, ale len ukázať, že existuje alternatíva k epistemickému kontextualizmu. Netvrdil som dokonca ani to, že epistemický kontextualizmus je nevyhovujúci a že ho treba nahradiť nejakým iným prístupom. Ukázal som len to, že údaje, ktoré kontextualisti považujú za najlepšiu motiváciu v prospech ich prístupu, možno vysvetliť aj alternatívnymi spôsobmi, a teda tieto javy nemožno považovať za najlepší argument v prospech epistemického kontextualizmu. Ak máme rozhodnúť medzi epistemickým kontextualizmom a alternatívnymi koncepciami, musíme údajný kontextualistický argument doplniť ďalšími argumentmi. Ak však treba ďalšie argumenty, je zrejmé, že v žiadnom prípade to, čo DeRose považuje za najlepší argument, najlepším argumentom byť nemôže, keďže rozhodovanie medzi teóriami sa bude robiť na základe iných kritérií.

Aké z toho možno získať poučenie? Opäť sa v plnej nahote ukázalo, že empirické údaje, ktoré získame z bežných komunikačných situácií, nie sú vo všeobecnosti postačujúce na to, aby sa využili pri rozhodovaní medzi konkurenčnými teóriami.

Literatúra

AUSTIN, J. L. (1979): Other Minds. In: *Philosophical Papers*. Oxford: Oxford University Press, 76-116.

BACH, K. (2002): Seemingly Semantic Intuitions. In: Campbell, J. – O'Rourke, M. – Shier, D. (eds.): *Meaning and Truth: Investigating Philosophical Semantics*. New York: Seven Bridges Press, 21-33.

BACH, K. (2005a): The Emperor's New 'Knows'. In: Preyer, G. – Peter, G. (eds.): *Contextualism in Philosophy: Knowledge, Meaning, and Truth*. Oxford: Clarendon Press, 51-89.

BACH, K. (2005b): Context *ex Machina*. In: Szabó, Z. G. (ed.): *Semantics versus Pragmatics*. Oxford: Clarendon Press, 15-44.

CAPPELEN, H. – HAWTHORNE, J. (2009): *Relativism and Monadic Truth*. Oxford: Oxford University Press.

COHEN, S. (1999): Contextualism, Skepticism, and the Structure of Reasons. *Philosophical Perspectives* 13, 57-89.

CORAZZA, E. – DOKIC, J. (2007): Sense and Insensibility or Where Minimalism Meets Contextualism. In: Preyer, G. – Peter, G. (eds.): *Context-Sensitivity and Semantic Minimalism. New Essays on Semantics and Pragmatics*. Oxford: Oxford University Press, 169-193.

DEROSE, K. (2011): *The Case for Contextualism: Knowledge, Skepticism, and Context. Vol. 1*. Oxford: Clarendon Press.

KAPLAN, D. (1989): Demonstratives. In: Almog, J. – Perry, J. – Wettstein, H. (eds.): *Themes from Kaplan*. Oxford: Oxford University Press, 482-563.

MACFARLANE, J. (2005): Making Sense of Relative Truth. *Proceedings of the Aristotelian Society* 105, 321-339.

MACFARLANE, J. (2007a): Relativism and Disagreement. *Philosophical Studies* 132, 17-31.

MACFARLANE, J. (2007b): Semantic Minimalism and Nonindexical Contextualism. In: Preyer, G. – Peter, G. (eds.): *Context-Sensitivity and Semantic Minimalism. New Essays on Semantics and Pragmatics*. Oxford: Oxford University Press, 240-250.

MACFARLANE, J. (2009): Nonindexical Contextualism. *Synthese* 166, 231-250.

RYSIEW, P. (2001): The Context-Sensitivity of Knowledge Attributions. *Noûs* 35, 477-514.

SCHIFFER, S. (1996): Contextualist Solutions to Scepticism. *Proceedings of the Aristotelian Society* 96, 317-333.

STANLEY, J. (2004): On the Linguistic Basis for Contextualism. *Philosophical Studies* 119, 119-146.

STANLEY, J. (2005): *Knowledge and Practical Interests*. Oxford: Oxford University Press.

ZEMAN, D. (2011): Knowledge Attributions and Relevant Epistemic Standards. In: Recanati, F. – Stojanovic, I. – Villanueva, N. (eds.): *Context-Dependence, Perspective and Relativity*. Berlin – New York: de Gruyter, 225-250.

ZOUHAR, M. (2009): Od používateľov jazyka k sémantike. *Filozofia* 64, č. 4, 297-311.

ZOUHAR, M. (2010): *Medzi sémantikou a epistemológiou jazyka*. Bratislava: aleph.

ZOUHAR, M. (2011): *Význam v kontexte*. Bratislava: aleph.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 187-205

Logic Programming and Interactive Applications[1]

ALEXANDER ŠIMKO

Department of Applied Informatics. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University. Mlynská dolina. 842 48 Bratislava. Slovak Republic
simko@ii.fmph.uniba.sk

JOZEF ŠIŠKA

Department of Applied Informatics. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University. Mlynská dolina. 842 48 Bratislava. Slovak Republic
siska@ii.fmph.uniba.sk

RECEIVED: 11-12-2012 ▪ ACCEPTED: 02-03-2013

Abstract: Answer Set Programming (ASP) is a logic programming based, truly declarative formalism for general purpose problem solving. Its declarative nature allows users to solve problems by defining *what the solutions are* instead of *how to find them*. Complete lack of an imperative component in ASP makes creation of end user applications or integration with other systems demanding. External tools that can process and interpret the output of ASP solvers are needed. To address this issue in the case of simple applications with an input – output interaction loop we introduce a framework for iterative logic applications. Such applications consist of a core logic program that is used to evaluate user actions w.r.t. their current state and to derive a new state of the application. We take care to define the framework in a way that allows it to be used also with other formalism, especially SAT solvers. We also present a web based implementation of such framework for ASP.

Keywords: Answer Set Programming – Declarative Problem Solving – Interactive Applications – Logic Programming.

[1] This work was supported by the Slovak national project VEGA no. 1/1333/12.

1. Introduction

The aim of this work is to present Logic Programming (LP) and specifically Answer Set Programming (ASP) as a formalism for practical applications that can react to user input and provide appropriate output.

Logic programming presents a robust problem solving and knowledge modelling tool. Rooted in classical logic, it provides an expressive and concise language. Answer set programming, as a truly declarative extension of LP, provides a strong formalism for general purpose problem solving.

The declarative nature of ASP allows users to solve problems by defining *what the solutions are* instead of *how to find them*. Efficient solver implementations make it possible to use such approach for an expanding range of applications.

Complete lack of an imperative component in ASP means that creation of non-trivial end user applications or integration with other systems requires external tools that can process and interpret the output of ASP solvers. Creating and maintaining such support systems can easily be more demanding than creating the logic programs themselves.

To address this issue in the case of simple applications with no external interaction except for a contained input – output interaction loop we introduce a framework for iterative logic applications. Such applications consist of a core logic program that is used to evaluate user actions w.r.t. their current state and to derive a new state of the application. We take care to define the framework in a way that allows it to be used also with other formalism, especially SAT solvers.

We also present an implementation of such framework for ASP. A web based system is used to present the application state to the user and allow him to select actions to be executed. A range of ASP solvers can then be utilized to compute answer sets of the corresponding logic program, which are then used to create a new application state. XSLT stylesheets are used as a declarative way to define how the application state is presented to the user.

This article is organized as follows: in Section 2 we give a brief overview of logic programming and define logic programs and answer sets; in Section 3 we present Answer Set Programming as a fully declarative approach to problem solving and also describe selected ASP solver implementations; in Section 4 we introduce the framework for interactive logic applications and describe its implementation in Section 5.

2. Logic Programming

In 1965 Robinson introduced resolution (Robinson 1965) as a method of automated theorem proving that started an era of logic related software. Later, Kowalski and Colmeraurer realized, that *logic can be used as a programming language* (Lloyd 1987). Implication $a,b \Rightarrow c$ can be understood in two ways: (i) declaratively – if a and b have been computed, also c is computed, and (ii) imperatively – in order to compute c we need to first compute a and b. Collection of implications without negation (more precisely definite clauses), called *rules,* is understood as a logic program, and resolution is used to answer queries to the program. Programming language *PROLOG* was born.

The original goal of PROLOG was to be a declarative programming language. However, in effort to provide an effective implementation it diverged from that goal (Sterling – Shapiro 1986). PROLOG is sensitive to an order: (i) of the rules in a program, (ii) of the literals in a rule. Later, PROLOG was extended in order to allow the use of negative information. Special type of negation, called *negation as failure,* was allowed in the conditional part of the rule. Semantics of the negation was given procedurally: answer to *not a* is true, if the resolution procedure's answer to a is false.

Over time several attempts to give logic programs a declarative semantics appeared. A model-theoretic characterization of semantics of a logic program can be found in (Lloyd 1987). Different approaches to declarative semantics of negation of failure appeared: stratified programs (Apt – Blair – Walker 1988), compilation of logic programs with negation into classical logic (Clark 1977), well-founded models (Gelder – Ross – Schlipf 1988). Finally, stable model semantics (Gelfond – Lifschitz 1988), using reduction to logic programs without negation, was defined. In 1991 it was extended to allow for disjunction and classical negation. *Answer set semantics* (Gelfond – Lifschitz 1991) was born.

In what follows we provide modified version of the definitions of answer set semantics from (Baral 2003).

2.1. Syntax

In this subsection we present the syntax of logic programming.

Definition 1 (Alphabet). *An* alphabet *of a logic program consists of symbols divided into six classes:*

- *variables,*
- *object constants,*
- *function symbols,*
- *predicate symbols,*
- *connectives "¬", "←", "not", "or" and comma symbol, and*
- *punctuation symbols "(", ")".*

Each function and predicate symbol is associated with a natural number, called arity.

We will follow the convention that object constants, function symbols and predicate symbols start with lowercase, and variables start with uppercase letters.

Definition 2 (Term). *A* term *is inductively defined as follows:*

- *A variable is a term.*
- *An object constant is a term.*
- *If $t_1, \ldots, t_n$ are terms and f is an n-ary function symbol, then $f(t_1, \ldots, t_n)$ is a term.*

Definition 3 (Atom). *An* atom *is an expression of the form $p(t_1, \ldots, t_n)$ where $t_1, \ldots, t_n$ are terms and p is an n-ary predicate symbol.*

Definition 4 (Literal). *A* literal *is an expression of the form a or $\neg a$, where a is an atom.*

Definition 5 (Rule). *A* rule *is an expression of the form*

$$l_0 \text{ or } \ldots \text{ or } l_k \leftarrow l_{k+1}, \ldots, l_m, \text{ not } l_{m+1}, \ldots, \text{not } l_n \tag{1}$$

where $0 \leq \mathrm{k} \leq m \leq n \in \mathbb{N}$ *and each l is a literal.*

A rule with $n = 0$ is called fact.

Notation 1. *Let r be a rule of the form 1. Then*

- *l_0 or $\ldots$ or l_k is called the* head *of the rule r, and we use $head(r)$ to denote the set $\{l_0, \ldots, l_k\}$,*
- *$l_{k+1}, \ldots, l_m$, not $l_{m+1}, \ldots,$ not l_n is called the* body *of r and we denote it by $body(r)$,*
- *$l_{k+1}, \ldots, l_m$ is called the* positive body *of r, and we use $body^+(r)$ to denote the set $\{l_{k+1}, \ldots, l_m\}$,*

- *not* $l_{m+1}, \ldots,$ *not* l_n *is called the* negative body *of r, and we use* $body^{-}(r)$ *to denote the set* $\{l_{m+1}, \ldots, l_n\}$.

Logic programming uses two kinds of negation:

- explicit negation $\neg a$ meaning that an agent believes a is false,
- default negation *not a* meaning that an agent does not believe a is true, but it does not necessary mean the agent believes a is false.

Moreover, logic programming uses the connective "or" which differs from the connective "$\vee$" from the classical logic. Informally, *a or b* means an agent believes a is true or believes b is true, as opposed to a is true or b is true. In the classical logic, $a \vee \neg a$ is entailed by each theory. On the other hand, *a or* $\neg a$ is not entailed by each logic program (Gelfond – Kahl 2012).

Definition 6 (Language). *A* language *given by an alphabet consists of all the rules constructed from the symbols of the alphabet.*

Definition 7 (Logic program). *A* logic program *over a language is a finite set of rules.*

Definition 8 (Ground term, atom, literal, rule). *A term (atom, literal, rule) is called* ground *iff it does not contain variables.*

In logic programming, a rule with variables is viewed as a shorthand for all its ground instances, i.e. all rules obtained by replacing the variables by ground terms.

Definition 9 (Grounding). *Let* $\mathcal{L}$ *be a language, and r be a rule.*

The grounding *of r in* $\mathcal{L}$*, denoted as* $ground(r,\mathcal{L})$ *is the set of all the rules obtained from r by all possible substitutions of ground terms from* $\mathcal{L}$ *for the variables in r.*

Let P be a logic program. Then grounding *of P in* $\mathcal{L}$ *is* $ground(P,\mathcal{L}) = \bigcup_{r \in P} ground(r,\mathcal{L})$.

When a logic program P is given without any explicit language, we assume the implicit language containing exactly the symbols from the program P. We denote this language by $\mathcal{L}_P$. Then $ground(P)$ denotes $ground(P,\mathcal{L}_P)$.

Semantics of a logic program P is given by a semantics of $ground(P)$.

2.2. Semantics

Answer set semantics assigns to each logic program a set of answer sets – alternative belief sets a rational agent might accept. Rationality is given by the principles (Gelfond – Kahl 2012):

- if an agent believes in the body of a rule, it must believe in the head of the rule,
- an agent does not believe in contradictions,
- an agent believes nothing it is not forced to believe

In definition of answer set semantics we will work with grounded programs. Definition is divided into two parts. First, a semantics is defined for positive programs – programs without default negation. Then the definition is extended to the general case.

Definition 10 (Consistency). *A set S of ground literals is* consistent *iff it does not contains literals a and ¬a, where a is an atom.*

Definition 11 (Satisfaction). *Let S be a set of ground literals. Let r be a rule. S satisfies*

- *body*(r) *iff* $body^{+}(r) \subseteq S$ *and* $body^{-}(r) \cap S = \emptyset$,
- *head*(r) *iff* $head(r) \cap S \neq \emptyset$,
- *r iff S satisfies head*(r) *if it satisfies body*(r).

S satisfies a logic program P iff S satisfies each $r \in P$.

Definition 12 (Positive program). *A logic program P is called* positive *iff* $body^{-}(r) = \emptyset$ *for each* $r \in P$.

Definition 13 (Answer sets of a positive program). *A consistent set of ground literals S is an answer set of a positive logic program P iff S is a subset-minimal set of literals that satisfies P, i.e. there is no subset* $S' \subset S$ *that satisfies P.*

The definition of answer sets for the general case is non-constructive. First, a candidate for an answer set is guessed. Then it is tested, whether it is stable. First, the rules with unsatisfied negative bodies are removed. Since the rules left have satisfied negative bodies, the negative bodies are also removed. The resulting program is positive, and it’s semantics is already defined. The answer set guess is stable iff it is an answer set of the reduced program.

Definition 14 (Gelfond-Lifschitz reduction). *Let P be a logic program and S be a set of literals.*

Then, reduction *of P w.r.t. S, denoted P^S, is the set* $\{head(r) \leftarrow body^+(r) : r \in P \text{ and } body^-(r) \cap S = \emptyset\}$.

Definition 15 (Answer sets). *Let P be a logic program, and S be a set of literals.*

S is an answer set of P iff S is an answer set of P^S.

Answer set semantics enjoys the following nice property.

Proposition 1 (Exclusive support). *Let P be a logic program, S an answer set of P, and l be a literal.*

If $l \in S$, then there is a rule $r \in P$ such that:

- *S satisfies $body(r)$, and*
- *$head(r) \setminus \{1\} \not\subseteq S$.*

Definition 16 (Entailment). *Let P be a logic program, and l be a literal.*

l is entailed by a program P, denoted $P \models l$ iff $l \in S$ for each answer set S of P.

$Cn(P) = \{l : P \models l\}$ will denote the set of all the consequences of P.

Proposition 2. *Cn operator is non-monotonic, i.e. it does not hold that for each programs P_1, P_2 such that $P_1 \subseteq P_2$ we have that $Cn(P_1) \subseteq Cn(P_2)$.*

Example 1. *Consider the programs P_1:*

$$a \leftarrow not\ b$$

and P_2:

$$\begin{array}{lll} a & \leftarrow & not\ b \\ b & \leftarrow & \end{array}$$

We have that $Cn(P_1) = \{a\}$ and $Cn(P_2) = \{b\}$. Hence $P_1 \subseteq P_2$, but $Cn(P_1) \not\subseteq Cn(P_2)$.

A logic program is not guaranteed to have an answer set.

Example 2. *Consider the program P*

$r_1 : a \leftarrow$

$r_2 : inc \leftarrow not\ inc,\ a$

S	P^S	answer sets of P^S
$\emptyset$	$a \leftarrow$, $inc \leftarrow a$	$\{a, inc\}$
$\{a\}$	$a \leftarrow$, $inc \leftarrow a$	$\{a, inc\}$
$\{inc\}$	$a \leftarrow$	$\{a\}$
$\{a, inc\}$	$a \leftarrow$	$\{a\}$

For each answer set candidate S we have that S is not an answer set of P^S. Therefore P has no answer set.

The rule r_2 works here as an integrity constraint. It causes each answer set candidate S such that $a \in S$ to be eliminated.

Definition 17 (Integrity constraint). *An expression of the form*

$$\leftarrow l_1, \ldots, l_m, \; not\ l_{m+1}, \ldots, not\ l_n \tag{2}$$

is called an integrity constraint.

Notation 2. *Let c be an integrity constraint of the form 2. By $body^+(c)$ we denote the set $\{l_1, \ldots, l_m\}$, and by $body^-(c)$ we denote the set $\{l_{m+1}, \ldots, l_n\}$.*

Definition 18 (Violation). *We say that a set of literals S violates a ground integrity constraint c iff $body^+(c) \subseteq S$, and $body^-(c) \cap S = \emptyset$.*

An integrity constraint is used to eliminate an answer set candidate that violates the integrity constraint.

Given a logic program P, an integrity constraint c is understood as a shorthand for the rule $inc \leftarrow not\ inc, body(c)$, where inc is a new literal present in neither P nor c.

3. Declarative problem solving

Answer set programming (Marek 1999, Niemelä 1999) has emerged as a declarative problem solving paradigm using logic programming under answer set semantics. A logic program is written in a way, that its answer sets correspond to the solutions of a given problem (Figure 1). A logic program is usually written in a *generate-and-test* way – it is divided into three parts:

- *instance,* encoding the problem's instance,
- *generator,* whose answer sets correspond to solution candidates, and
- *tester,* that eliminates candidates that are not solutions.

Example 3. *Consider the classical problem of putting N chess queens on the N × N board in a way that no two queens attack each other.*

A generator could be written as follows:

$$g_1 : on(X, Y) \leftarrow d(X), d(Y), not\ \neg on(X, Y)$$
$$g_2 : \neg on(X, Y) \leftarrow d(X), d(Y), not\ on(X, Y)$$

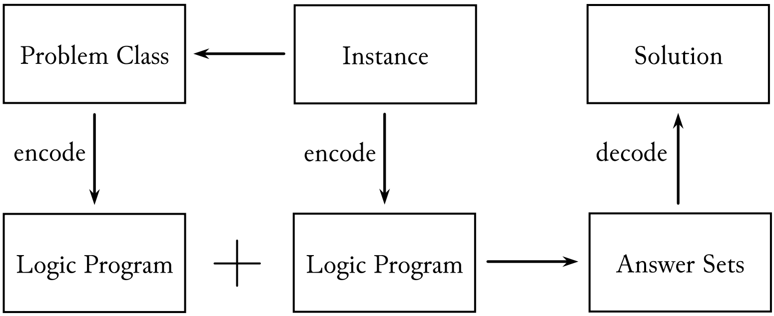


Figure 1: Answer Set Programming

$d(X)$ means that X is a valid row/column number. $on(X, Y)$ means that a queen is on the position (X, Y).

Together with the encoding of problem instance $N = 2$

$$i_1 : d(1) \quad \leftarrow$$
$$i_2 : d(2) \quad \leftarrow$$

it has 16 answer sets. The following sets

$$S_1 = \{d(1), d(2), \neg on(1, 1), \neg on(1, 2), \neg on(2, 1), \neg on(2, 2)\}$$
$$S_2 = \{d(1), d(2), on(1, 1), \neg on(1, 2), on(2, 1), \neg on(2, 2)\}$$
$$S_3 = \{d(1), d(2), on(1, 1), on(1, 2), on(2, 1), on(2, 2)\}$$

are three of them.

A tester could be written as follows:

$$\begin{array}{lll} t_1 : & \leftarrow & on(X, Y1), on(X, Y2), Y \neq Y2 \\ t_2 : & \leftarrow & on(X1, Y), on(X2, Y), X \neq X2 \\ t_3 : & \leftarrow & on(X1, Y1), on(X2, Y2), X \neq X2, Y \neq Y2, \\ & & |X - X2| = |Y - Y2| \end{array}$$

$$t_4 : hasq(X) \leftarrow on(X, Y)$$
$$t_5 : \quad \leftarrow d(X), not\ hasq(X)$$

Expressions of the form $X = Y$ and $X \neq Y$ are not part of the syntax of rules. They are understood as conditions for grounding.

The integrity constraint t_1 eliminates the answer set candidates, in which two queens are at the same column. The integrity constraint t_2 eliminates the answer set candidates, in which two queens are at the same row. The integrity constraint t_3 eliminates the answer set candidates, in which two queens are at the same diagonal. The integrity constraints t_4, t_5 check whether N queens are used.

The tester eliminates all the answer set candidates for the presented instance as the 2 – queen problem has no solution.

Answer set programming is well suited for constraint satisfaction problems. A constraint satisfaction problem is given by a set of variables, each associated with the domain, and a set of constraints. The task is to find a variable assignment such that all constraints are satisfied – constraints put conditions on variable assignment. A constraint satisfaction problem can be directly solved using generate-and-test approach of answer set programming. Generator generates answer set candidates, where each candidate represents one variable assignment. Constraints of the constraint satisfaction problem are then transformed into the rules and integrity constraints of a tester, which tests whether an assignment is a valid one.

Many real world problems can be understood as a constraint satisfaction problem, e.g. design of a computer configuration given a set of requirements (which can be seen as the constraints), construction of a plan of a given length etc.

Moreover answer set programming is not only restricted to constraint satisfaction problem. It can be easily used to solve problems from NP complexity class, given a problem is defined in a guess-and-test manner: (i) first, a candidate is guessed, and (ii) then it is tested whether it is a solution to the problem. Again, generator is used to generate answer set candidates, each representing a problem solution candidate, and tester performs the test.

Answer set programming in not the only option for such tasks. Alternative approach is for example to encode a problem using propositional logic in a way that the models of the theory represent the problem solutions. Afterwards a SAT solver is employed to compute the solutions. However, answer set programming has a big advantage over SAT. In a logic program, we can divide a program into two parts: (i) the first one representing an instance of the problem class, and (ii) the second, describing solutions of the problem class in general, without knowing an instance. On the other hand, when using propositional logic, we cannot separate a theory in this way. Hence, in order to use both SAT solvers and modular representation of a problem, we must use some other language and use a transformation to propositional logic.

3.1. ASP solvers

An ASP solver is a computer program that accepts a logic program on its input, and provides its answer sets on its output.

Inspired and built upon the success of SAT solvers, many ASP solvers were implemented, and many optimization techniques were developed. We mention the most prominent ones, namely *smodels* (http://www.tcs.hut.fi/Software/smodels/), *clasp* (Gebser et al. 2007), *claspD* (Drescher et al. 2008), and *DLV* (http://www.dlvsystem.com/dlvsystem/). *Clasp* and *smodels* do not allow disjunction in the heads of rules, while *claspD* and *DLV* do. The reason is a higher computational complexity of disjunctive logic programs (Baral 2003).

The *smodels* solver uses a two step computation process. First, an input program is processed by a parser. It parses the input program and produces a machine readable format usable by the *smodels* solver. It also performs grounding of the input program, whereby the variables in rules are replaced by ground literals. A simplification of the ground program is also performed and the result is passed to the solver.

Historically, *lparse* was the first parser that was used together with the *smodels* solver. Later, the *gringo* parser and *clasp* solver were developed. To provide compatibility, *gringo* and *clasp* support the input language of *lparse* and *smodels*.

On the other hand, the *DLV* solver works directly on programs with variables, and does not require an external parser. However, it does not support function symbols.

In addition to the syntax presented in Section 2.1, these solvers support many extensions, such as:

- *aggregates* – allow for example to determine the number of literals satisfying certain condition,

- *optimization statements* – allow to compute only minimal answer sets w.r.t. a given criterion,
- *choice rules* – enable to express generators in a compact and readable form.

4. Interactive logic applications

In this section we present a framework for interactive applications based on logic (model based) formalisms. We start with a simple generalization of such formalisms and then use it to define an application, its states and (iterative) execution.

Although we are concerned mainly with logic programs, any formalism with a model-theoretic semantics and an appropriate implementation can be used to create the kind of applications we present in this work. Our only requirement is that the formalism defines a semantics that assigns models (answer sets, solutions) to programs (theories).

Definition 19 (LP Formalism). *A* Logic Programming Formalism *is a triple* $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \mathrm{Sem})$, *where* $\mathcal{P}$ *is a (non-empty) set of possible programs,* $\mathcal{M}$ *is a (non-empty) set of possible models and* $\mathrm{Sem} : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathcal{M}}$ *is a function that assigns sets of models to programs.*

Throughout this work we consider Answer Set Programming as our intended formalism, $\mathcal{P}$ thus being the set of all logic programs and $\mathcal{M}$ the set of all possible answer sets. ASP solvers provide direct means of implementation and the expressivity of logic programs allows the creation of applications with very little need of external processing.

Propositional logic also provides applicable formalisms with implementations in the form of SAT solvers. However, the restrictions on propositional formulae and the restrictive input formats used in SAT solvers require additional layers of pre- and post-processing for any meaningful applications. To show that it is possible to cover even such cases with our framework we also include a few remarks about propositional logic where relevant.

The goal of an interactive application is the repetitive execution and evaluation of user actions against the current state of the application. The application framework is responsible for the visualisation of the application's state along with the allowed actions and for the calculation of a new state. Because the user can choose from multiple actions, which can have non-deterministic consequences, there can be various possible outcomes in each states. The application can thus be either linearly *executed* or the relationships of application states and actions can be studied in the form of an *execution graph*.

We start by defining the application itself. In its simplest form, the application consists of a main program (theory), input, output and presentation function. The presentation function interprets a current state of the application, presents it to the user and returns his chosen action(s). The input function combines the main program with all this information into a program in the used LP Formalism. Semantics of the formalism is then used to find the models of this program and (if possible) one of them is selected. The output function is used to convert such resultant model into a new application state.

Definition 20 (Interactive application). *Let* $(\mathsf{P}, \mathsf{M}, \text{Sem})$ *be an LP Formalism, let* P^A *be a set of application programs. An* interactive application *over* $(\mathsf{P}, \mathsf{M}, \text{Sem})$ *is a tuple*

$$A = (P, S, \mathsf{A}, In, Out, User, s_0)$$

where

1. $P \in \mathsf{P}^A$ *represents the main application program,*
2. S *is a non-empty set of possible application states,*
3. A *is a set of possible user actions,*
4. $In : \mathsf{P}^A \times S \times 2^{\mathsf{A}} \to \mathsf{P}$ *is an input transformation,*
5. $Out : \mathsf{M} \to S$ *is an output transformation,*
6. $User : S \times \mathbb{N} \to 2^{\mathsf{A}}$ *is a function that represents user input at a specific time.*

Definition 21 (Application Instance). *An* application instance *is a tuple* (A, s) *where* $A = (P, S, \mathsf{A}, In, Out, User, s_0)$ *is an application and* $s \in S$ *is a state. We say that* (A, s) *is an instance of* A *with an actual state* s*.*

To abstract from the structure of the programs as much as possible, we delegate all responsibility for state and action transformations and their incorporation into the main program to the input transformation function. In the case of logic programming, as well as many other formalisms, this can be easily reduced to the transformation of the application state into a logic program (In^S) where the input transformation itself can then be given as

$$In = \mathsf{P} \cup In^S(s) \cup User(s, i).$$

However even in the case of logic programming the more general definition of *In* allows some interesting possibilities that we talk about in section 6.

Also, because we do not require P to actually be a program from P, this allows us to easily do various kinds of preprocessing on P. To implement propositional logic based applications through the use of SAT solvers, P can be a set of formulae schemes that are appropriately translated into a set of propositional formulae by *In* based on the actual state of the application.

To obtain the next state when executing an application we simply apply the semantics to the results of the input transformation *In*. Because we allow the semantics to assign multiple models to a program (representing possible outcomes of user's actions), we arbitrarily select a single one of them. This model is then transformed into the application's new state using the *Out* transformation.

Definition 22 (Application Iteration). *Let (A, s_i) be an application instance at time $i \in \mathbb{N}$. The next state of the instance is*

$$s_{i+1} = Out\ (Sel\ (\mathrm{Sem}\ (In\ (P,\ s_i,\ User\ (s_i,\ i)))))$$

where $Sel : 2^{\mathsf{M}} \to \mathsf{M}$ is a selection function that selects an arbitrary model from a set of models or returns a special (i.e. empty) model if the set is empty.

Example 4. *Let us consider a simple two player game: each player has a switch. At every step each player can either flip his switch or leave it as it is. The first player wins when exactly one of the switches is turned off.*

We can formulate this game as an interactive application (over logic programs) in which the user plays against the computer:

$$\begin{aligned}
S &= 2^{\{on(u),\ on(c)\}} \\
\mathsf{A} &= \{flip(u), pass(u)\} \\
User(s, i) &= \begin{cases} \{flip(u)\} \\ \{pass(u)\} \end{cases} \\
In(P, s, a) &= P \cup s \cup \{a\} \\
Out(M) &= \{on(X) \mid next(X) \in M\} \\
s_0 &= \emptyset
\end{aligned}$$

Possible application states are subsets of $\{on(u), on(c)\}$*, where* $on(u)$ $(on(c))$ *represents that the switch belonging to the user (computer player) is turned on. There are two possible actions for the users: flip it* ($flip(u)$) *or leave it be* ($pass(u)$)*. The User function presents the current application state to the users and returns one of these actions based on his choice.*

The input transformation adds the current state and user's action to the program as facts. The output transformation creates a new state based on the presence of the predicate next in the selected answer set.

The main (logic) program P of the application is formulated as follows:

$$\begin{array}{rcl} flip(c) & \leftarrow & \text{not } pass(c) \\ pass(c) & \leftarrow & \text{not } flip(c) \\ next(X) & \leftarrow & on(X), \text{not } flip(X) \\ next(X) & \leftarrow & \text{not } on(X), flip(X) \end{array}$$

The first two rules generate two answer sets that correspond to the respective moves of the computer player. The last two rules evaluate the results of the actions.

4.1. Application analysis

In addition to simple execution of applications our framework allows another option: a formal way to define and study the interaction of application states and user actions. Transitional properties of a specific application can be visualized through a graph representing the relations between application states and actions. Various properties of such graph or its subpart can then be studied.

Definition 23 (Execution graph). *Let* $A = (P, S, \mathcal{A}, In, Out, User, s_0)$ *be an application. A (complete)* execution graph *for* A *is a graph* $\boldsymbol{G}_A = (V, E)$ *with* $V = S \cup \mathcal{P}$ *and a set of labeled edges* E *such that*

$$\begin{array}{lll} (s, Q, a) \in E & \textit{iff} & In(P, s, a) = Q \\ (Q, s, M) \in E & \textit{iff} & M \in Sem(Q) \wedge Out(M) = s \end{array}$$

Example 5. *Let us consider the application (game) from example 4. Figure 2 depicts the complete execution graph for this application. Circled vertices represent states while the rest represent actual programs (without the main program P) with u and c instead of* $on(u)$ *and* $on(c)$ *respectively.* $flip(u)$ *and* $pass(u)$ *are also abbreviated as* $f(u)$ *and* $p(u)$*. Each vertex representing a state has two outgo-*

ing edges: each for one of the user's actions. Each vertex representing a program has also two outgoing edges representing the two possible answer sets generated by the first two rules of P that encode the computer moves.

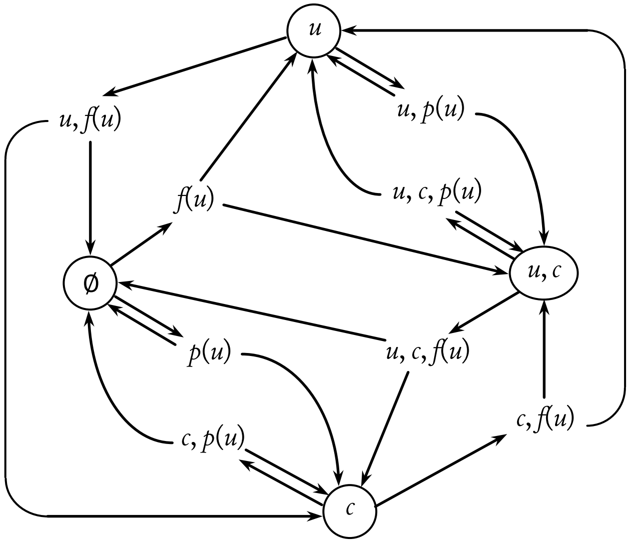


Figure 2: The execution graph for application from example 5

A complete execution graph is a tool that allows theoretical study of an application. When working with actual applications it often makes more sense to consider only a finite subset of the execution graph accessible from the initial state. This can represent the so far explored options of the application execution.

Definition 24 (Partial execution graph). *A* partial execution graph (V', E') *for an application A is a connected sub-graph of the (complete) execution graph for A such that*

- (V', E') *contains* s_0,
- *for each vertex* $v \in V'$ *there is a (oriented) path from* s_0 *to* v,
- *for each vertex* $v \in \mathsf{P}$ *it contains all its outgoing edges from the execution graph.*

A trace *for an instance* (A, S) *is a path* $h_0, h_1, \ldots, h_n$ *in a partial execution graph for A such that* $h_0 = s_0$ *and* $h_n = s$.

5. Implementation

The interactive application framework described in the previous section was implemented as a Python web application (ILPA. A system for interactive logic applications. http://dai.fmph. uniba.sk/~siska/ilpa/). It allows users to create applications composed from logic programs, to define input and output transformations and to create user interfaces (presentation functions) using XSLT stylesheets.

The implementation is based on a configurable backend that allows the usage of various LP implementations such as SMODELS (http://www.tcs.hut.fi/Software/smodels/), DLV (http://www.dlvsystem.com/dlvsystem/) or clasp (Gebser et al. 2007). The system also implements basic preprocessing options as well as a simple modularization framework (Šiška 2011).

Application states are represented as sets of atoms and usually serialized as a XML document. A configurable framework of atom filters and translations can be used to define input and output transformations, however the input transformation only translates the state into a set of facts and then simply joins them with the main program and user actions (passed as is from the presentation function). A XSLT transformation can be used as general-purpose filter that allows greater flexibility when translating states.

The presentation function is implemented as a XSTL template that transforms the state (represented as a XML document) into HTML code that is presented to the user. Special hyperlinks can be generated, that are then interpreted as user's actions.

Users can edit logic programs and XSLT stylesheets stored on the server, as well as define applications and create and execute their instances. In addition to simple linear execution of an application, the user can also explore the (expanding) partial execution graph of an instance.

6. Conclusion

We presented Answer Set Programming as a very potent formalism for general purpose problem solving. Its declarative nature allows users to search for solutions be defining *what they are* instead of *how to find them*. Various efficient solver implementations provide the means to use ASP in an expanding range of applications.

To reduce the amount of additional software and tools required when integrating ASP solutions into other applications we introduced a framework for iterative, logic based applications that can use LP as their main (and only) language. We defined an *interactive application,* its instance and execution step (iteration). We presented our implementation of this framework that allows users to create their own application and to run them using a web based interface.

In order not to restrict this framework only to logic programs and the answer set semantics, we assumed a generalized formalism with a model-theoretic semantics as the fundamental building block of the framework. Together with flexible definitions of input and output transformations this allows the use of various other formalism such as SAT solvers for proposition logic.

The flexibility of the input transformation allows also the creation of applications that actually modify the executed program on the fly. The input transformation can introduce new rules into the final program based on current application state or even remove rules from the main program. This can lead to the creation of evolving applications that change their behaviour based on the history of actions. It would be interesting to further study such approach and to compare it with similar work such as Evolving Logic Programming (Alferes et al. 2002).

References

ALFERES, J. J. – BROGI, A. – LEITE, J. A. – MONIZ PEREIRA, L. (2002): Evolving logic programs. In: *JELIA '02: Proceedings of the European Conference on Logics in Artificial Intelligence*. London> Springer-Verlag, 50-61.

APT K. R. – BLAIR, H. A. – WALKER, A. (1988): *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*. Chapter Towards a theory of declarative knowledge. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 89-148.

BARAL, C. (2003): *Knowledge Representation, Reasoning and Declarative Problem Solving*. Cambridge University Press.

CLARK, K. L. (1977): Negation as failure. In: *Logic and Data Bases*. 293-322.

DRESCHER, C. – GEBSER, M. – GROTE, T. – KAUFMANN, B. – KÖNIG, A. – OSTROWSKI, M. – SCHAUB, T. (2008): Conflict-driven disjunctive answer set solving. In: Brewka, G. – Lang, J. (eds.): *Proceedings of the Eleventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*. AAAI Press, 422-432.

GEBSER M. – KAUFMANN B. – NEUMANN, A. – SCHAUB, T. (2007): Conflict-driven answer set solving. In: Veloso, M. (ed.): *Proceedings of the Twentieth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJ- CAI'07)*. AAAI Press/The MIT Press, 386-392. Available at http://www.ijcai.org/papers07/contents.php.

VAN GELDER A. – ROSS, K. A. – SCHLIPF, J. S. (1988): Unfounded sets and well-founded semantics for general logic programs. In: Edmondson-Yurkanan, C. – Yannakakis, M. (eds.): *PODS*. ACM, 221-230.

GELFOND, M. – KAHL, Y. (2012): *Knowledge Representation, Reasoning, and the Design of Intelligent Agents*.

GELFOND, M. – LIFSCHITZ, V. (1988): *The Stable Model Semantics for Logic Programming*. MIT Press, 1070-1080.

GELFOND, M. – LIFSCHITZ, V. (1991): Classical negation in logic programs and disjunctive databases. *New Generation Computing* 9, 365-385.

LLOYD, J. W. (1987): *Foundations of Logic Programming*. New York: Springer-Verlag.

MAREK, V. W. (1999): Stable models and an alternative logic programming paradigm. In: *In The Logic Programming Paradigm: a 25-Year Perspective*. Springer-Verlag, 375-398.

NIEMELÄ, I. (1999): Logic programs with stable model semantics as a constraint programming paradigm. *Ann. Math. Artif. Intell.* 25, Nos. 3-4, 241-273.

ROBINSON, J. A. (1965): A machine-oriented logic based on the resolution principle. *J. ACM* 12, No. 1, 23-41.

ŠIŠKA, J. (2011): Declarative description of module dependencies in logic programming. In: *Znalosti 2011*.

STERLING, L. – SHAPIRO, E. (1986): *The Art of Prolog*. Cambridge (MA): MIT Press.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 206-215

Action Models and their Induction

MICHAL ČERTICKÝ

Department of Applied Informatics. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University. Mlynská dolina. 842 48 Bratislava. Slovak Republic
certicky@fmph.uniba.sk

RECEIVED: 11-12-2012 ▪ ACCEPTED: 02-03-2013

Abstract: By action model, we understand any logic-based representation of effects and executability preconditions of individual actions within a certain domain. In the context of artificial intelligence, such models are necessary for planning and goal-oriented automated behaviour. Currently, action models are commonly hand-written by domain experts in advance. However, since this process is often difficult, time-consuming, and error-prone, it makes sense to let agents learn the effects and conditions of actions from their own observations. Even though the research in the area of action learning, as a certain kind of inductive reasoning, is relatively young, there already exist several distinctive action learning methods. We will try to identify the collection of the most important properties of these methods, or challenges that they are trying to overcome, and briefly outline their impact on practical applications.

Keywords: Action model – artificial intelligence – learning – planning.

1. Introduction

Reasoning about actions is an important aspect of commonsense reasoning, which served as a motivation behind some of the recent non-monotonic logic formalisms and planning languages (Eiter et al. 2000; Giunchiglia – Lifschitz 1998; McDermott et al. 1998; Pednault 1989; Ginsberg – Smith 1988). Intelligent and flexible goal-oriented automated behaviour and planning tasks require *knowledge about domain dynamics,* describing how certain actions affect the world. Such knowledge is in artificial systems referred to as *action model*.

In general, the action model can be seen as a double $\langle D, P\rangle$, where D is a representation of *domain dynamics (effects* and *executability preconditions* of every possible action) in any logic-based language, and P is a probability function defined over the elements of D. This probability expresses either the likelihood of certain action's effect, or our confidence in this piece of knowledge.

Typically, these action models are hand-written by domain experts. In many situations however, we would like to be able to induce such models automatically, since hand-writing them is often a difficult, time-consuming and error-prone task (especially in complex environments). In addition to that, every time we are confronted with new information, we need to do (often problematic) knowledge revisions and modifications.

An agent (artificial or living) capable of learning action models automatically possesses some degree of environmental independence (he can be deployed into various environments, where he would learn local causal dependencies and consequences of his actions).

The inductive process of automatic construction and subsequent improvement of action models, based on sensory observations, is called *action learning*. In recent years, several action learning methods have been introduced. They take various approaches and employ a wide variety of tools from many areas of artificial intelligence and computer science (Amir – Chang 2008; Yang et al. 2007; Balduccini 2007; Certicky 2012; Mourao et al. 2010; Zettlemoyer et al. 2005). In this paper, we will describe a collection of *interesting properties,* or *fundamental challenges* that any action learning method might, or might not be able to overcome.

2. Usability in Partially Observable Domains

Every domain is either fully, or partially observable. As an example of a *fully observable domain* let us consider a game of chess. Both players (agents) have a full visibility of all the features of their domain – in this case the configuration of the pieces on the board. Such configuration is typically called a *world state*. On the other hand, by *partially observable domain* we understand any environment, in which agents have only limited observational capabilities – in other words, they can see only a small part of the state of their environment (world states are partially observable). Real world is an excellent example of a partially observable domain. Agents of the real world (for example humans) can only observe a small part of their surroundings: they can only hear sounds from their closest vicinity (basically several meters, depending on how loud the sounds are), see only objects that are in their direct line of sight (given the light conditions are good enough), etc.

An action learning method is *usable in partially observable domains* only if it is capable of producing useful action models, even if the world states are not fully observable.

Learning the action models in partially observable domains is in principle more difficult task, since we do not observe some of the changes happening in the world after the execution of actions. To induce a causal link between the action and its effect, we need to observe this effect. However, in partially observable domains, this observation may be available later or not at all, making the learning slower and resulting models less precise.

3. Learning Probabilistic Action Models

There are two ways of modelling a domain dynamics (creating action models), depending on whether we want the randomness to be present or not. An action model is *deterministic,* if actions it describes have all a unique set of always successful effects. In other words, the probabilistic function P assigns the uniform probability of 1 to all the elements of D.

Conversely, in case of a *probabilistic* (or stochastic) action models, effects have a set of possible *outcomes* with non-uniform probabilistic distrubution. Let us clarify this concept using a simple toy domain called Blocks World, discussed extensively (among others) in (Nilsson 1982; Russell – Norvig 2003; Gupta – Nau 1992; Slaney – Thibaux 2001).

The Blocks World domain consists of a finite number of blocks stacked into towers on a table large enough to hold them all. The positioning of towers on the table is irrelevant. Agents can manipulate this domain by moving blocks from one position to another. Action model of the simplest Blocks World versions is composed of only one action *move*(B, P_1, P_2). This action merely moves a block B from position P_1 to position P_2 (P_1 and P_2 being either another block, or the table).

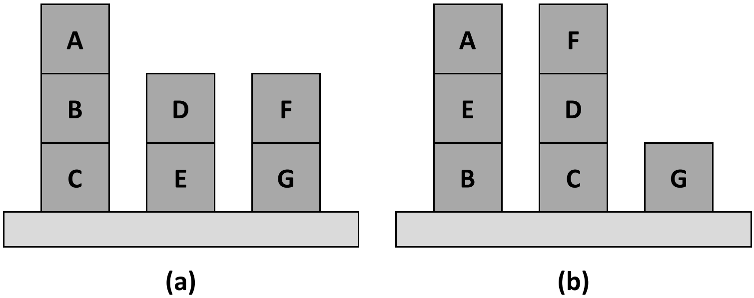


Figure 1: Two different world states in Blocks World domain.

Deterministic representation of such action would look something like this:

Name & parameters :

$move(B, P_1, P_2)$

Preconditions :

$\{on(B, P_1), free(P_1), free(\mathrm{P}_2)\}$

Effects:

$\{\neg on(B, P_1),\ on(B, P_2)\}$

Our action is defined by its name, preconditions, and a unique set of effects $\{\neg on(B, P_1),\ on(B, P_2)\}$, all of which are applied each time the action is executed. This basically means, that every time we perform an action $move(B, P_1, P_2)$, the block B will cease to be at position P_1 and will appear at P_2 instead. In a simple domain like Blocks World, this seems to be sufficient.

In the real world however, the situation is not so simple, and our attempt to move the block can have different outcomes:

Name & parameters :

$move(B, P_1, P_2)$

Preconditions :

$\{on(B, P_1), free(P_1), free(\mathrm{P}_2)\}$

Effects:

$$\begin{cases} 0.8: \neg on(B, P_1),\ on(B, P_2) \\ 0.1: \neg on(B, P_1),\ on(B, table) \\ 0.1: nochange \end{cases}$$

This representation of our action defines the following probabilistic distribution over three possible outcomes:

1. 80% chance that block B indeed appears at P_2 instead of P_1,
2. 10% chance that block B falls down on the table,
3. 10% chance that we fail to pick it up and nothing happens.

We can easily see that probabilistic action models are better suited for describing real-world domains, or complex simulations of non-deterministic nature, where agent's sensors and effectors may be imprecise and actions can sometimes lead to unpredicted outcomes.

The main difficulty in learning probabilistic action models lies in their size. Space complexity of such models tends to be considerably higher, and learning algorithms need to be able to distinguish relevant outcomes and ignore the others.

4. Dealing with Action Failures and Sensoric Noise

In some cases we prefer learning deterministic action models in stochastic domains. (Recall, that action models are used for planning. Planning with probabilistic models is computationally harder, which makes it unusable in some situations.) Therefore we need an alternative way of dealing with nondeterministic nature of our domain. There are two sources of problems that can arise in this setting:

4.1. Action Failures

As we noted in section 3, actions in non-deterministic domains can have more than one outcome. In a typical situation though, each action has one outcome with significantly higher probability than the others. In case of action $move(B, P_1, P_2)$ from Blocks World, this *expected outcome* was actually moving a block B from position P_1 to P_2. Then if after the execution the block was truly at position P_2, we considered the action successful. If the action had any other outcome, it was considered unsuccessful – we say that the action *failed*.

From the agent's point of view, action failures pose a serious problem, since it is difficult for him to decide whether given action really failed (due to some external influence), or the action was successfull, but his expectations about the effects were wrong (if his expectations were wrong, he needs to modify his action model accordingly).

4.2. Sensoric Noise

Another source of complications is so-called *sensoric noise*. In real-world domains, we are typically dealing with sensors that have limited precision. This means, that the observations we get do not necessarily correspond to the actual state of the world.

Even when agent's action is successful, and the expected changes occur, he may observe the opposite. From the agent's point of view, this problem is similar to the problem with action failures. In this case he needs to solve the dilemma, whether his expectations were incorrect, or the observation was imprecise.

In addition to that, sensoric noise can cause one more complication of a technical nature: If the precision of the observations is not guaranteed, even a single observation can be internally inconsistent. Action learning methods based on the computational logic sometimes fail to deal with this fact.

5. Learning both Preconditions and Effects

Since the introduction of the first planning language STRIPS (Fikes – Nilsson 1971) in early 70's, a common assumption is, that actions have some sort of *preconditions* and *effects*.

Preconditions[1] define what must be established in a given world state before an action can even be executed. Looking back at Blocks World, the preconditions of action $move(B, P_1, P_2)$ require both positions P_1 and P_2 to be free (meaning that no other block is currently on top of them). Otherwise, this action is considered inexecutable.

[1] Preconditions are sometimes called *executability conditions* or *applicability conditions* – especially when we formalise actions as operators over the set of world states.

Effects[2] simply specify what is established after a given action is executed, or in other words, how the action modifies the world state.

Some action learning approaches either produce effects and ignore preconditions, or the other way around. They are therefore incapable of producing complete action model from the scratch, and thus are usable only in situations where some partial hand-written action model is provided. In general, it is good to avoid the necessity to have any prior action model.

6. Learning Conditional Effects

Research in the field of planning languages has shown that expressive power of early (STRIPS-like) representations is susceptible to be improved by addition of so-called conditional effects. This results from the fact, that actions, as we usually talk about them in natural language, have different effects in different world states.

Consider a simple action of person *P* drinking a glass of beverage *B* – *drink*(*P*, *B*). Effects of such action would be (in natural language) expressed by following sentences:

- *P* will cease to be thirsty.
- If *B* was poisonous, *P* will be sick.

We can see, that second effect (*P* becoming sick) only applies *under certain conditions* (only if *B* was poisonous). We call effects like these *conditional effects.*

Early planning languages did not support conditional effects. Of course, there was a way to express aforementioned example, but we needed split it into two separate actions with different sets of preconditions:

drink_if_poisonous(*P*, *B*) and *drink_if_not_poisonous*(*P*, *B*).

Having a support for conditional effects thus allows us to express domain dynamics by lower number of actions, making our representation less space consuming and more elegant. Several state-of-the art planning languages provide the apparatus for defining conditional effects – see the following example:

---

2 Effects are sometimes called *postconditions* – primarily in the early publications in STRIPS-related context.

STRIPS extensions like Action Description Language (ADL) (Pednault 1989) or Planning Domain Definition Language (PDDL) (McDermott et al. 1998) express the effects of *drink*(*P*,*B*) action in the following manner:

```
:effect    (not (thirsty ?p))
:effect    (when (poisonous ?b) (sick ?p))
```

Definition of same two effects in fluent-based languages like K (Eiter et al. 2000) on the other hand, employs the notion of so-called *dynamic laws*:

```
caused — thirsty(P) after drink(P,B).
caused sick(P) after poisonous (B), drink(P,B).
```

Aside from creating more elegant and brief action models, the ability to learn conditional effects provides one important advantage: It allows for more convenient input form from our sensors. If we were unable to work with conditional effects, our sensors would have to be able to observe and interpret a large number of actions like *drink_if_poisonous*(*P*, *B*) or *drink_if_not_poisonous*(*P*, *B*). However, if our action model supports conditional effects, the sensors only need to work with a smaller number of more general actions like *drink*(*P*, *B*).

7. Online Algorithms and Tractability

As mentioned in the introduction, the action learning methods employ various tools from several areas of computer science and artificial intelligence. Since our focus lies on the artificial agents, and their ability to learn action models, either these tools themselves, or their actual objectification is algorithmic in nature. It is therefore needed to take the computational complexity and the actual running speed of used algorithms into account. We say that algorithms that run fast enough for their output to be useful are called *tractable* (Hopcroft 2007).

Additionally, the algorithms whose input is served one piece at a time, and upon receiving it, they have to take an irreversible action without the knowledge of future inputs, are called *online* (Borodin – El-Yaniv 1998).

For the purposes of action learning we prefer using online algorithms, which run once after every observation. Agent's newest observation is served as the input for the algorithm, while there is no way of knowing anything about future or past observations. Algorithm simply uses this observation to modify agent's knowledge (action model). Since the input of such algorithm is relatively small, tractability is usually not an issue here.

If we, on the other hand, decided to use offline algorithms for action learning, we would have to provide the whole history of observations on the input. Algorithms operating over such large data sets are prone to be intractable.

Since online algorithms are designed to run repeatedly during the "life" of an agent, he has some (increasingly accurate) knowledge at his disposal at all times. Offline action learning algorithms are, on the other hand, designed to run only once, after the agent's life, which makes them unusable in many applications.

There is however a downside to using online algorithms for action learning. Recall, that with online algorithms, the complete history of observations is not at our disposal, and we make an irreversible change to our action model after each observation. This change can cause our model to become inconsistent with some of the previous (or future) observations. This also means that the precision of induced action models depends on the ordering of the observations. Online algorithms are therefore potentially less precise than their offline counterparts. Lower precision is however often traded for tractability.

8. Conclusion

Based on relevant literature (Amir – Chang 2008; Yang et al. 2007; Balduccini 2007; Certicky 2012; Mourao et al. 2010; Zettlemoyer et al. 2005), we have identified a common collection of challenges, that the current action learning methods try to overcome. Each of these methods is able to deal with a different subset of these subproblems, which makes it applicable in different situations and domains. The relation between these challenges and the real-world applications of action learning methods has been clarified.

References

AMIR, E. – CHANG, A. (2008): Learning partially observable deterministic action models. *Journal of Artificial Intelligence Research* 33, No. 1, 349-402.

BALDUCCINI, M. (2007): Learning action descriptions with a-prolog: Action language c. In: *AAAI Spring Symposium: Logical Formalizations of Commonsense Reasoning*. 13-18.

BORODIN, A. – EL-YANIV, R. (1998): *Online Computation and Competitive Analysis.* New York: Cambridge University Press.

CERTICKY, M. (2012): Action learning with reactive answer set programming: Preliminary report. In: *ICAS 2012, The Eighth International Conference on Autonomic and Autonomous Systems*. 107-111.

EITER, T. – FABER, W. – LEONE, N. – PFEIFER, G. – POLLERES, A. (2000): Planning under incomplete knowledge. In: *Proceedings of the First International Conference on Computational Logic,* CL '00. London: Springer-Verlag, 807-821.

FIKES, R. E. – NILSSON, N. J. (1971): Strips: A new approach to the application of theorem proving to problem solving. *Artificial Intelligence* 2, Nos. 3-4, 189-208.

GINSBERG, M. L. – SMITH, D. E. (1988): Reasoning about action i: A possible worlds approach. *Artificial Intelligence* 35, No. 2, 165-195.

GIUNCHIGLIA, E. – LIFSCHITZ, V. (1998): An action language based on causal explanation: preliminary report. In: *Proceedings of the fifteenth national/tenth conference on Artificial intelligence/Innovative applications of artificial intelligence,* AAAI '98/IAAI '98. Menlo Park, CA, USA. American Association for Artificial Intelligence, 623-630.

GUPTA, N. – NAU, D. S. (1992): On the complexity of blocks-world planning. *Artificial Intelligence* 56, Nos. 2-3, 223-254.

HOPCROFT, J. E. (2007): *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* 3rd edition. Pearson Addison Wesley.

MCDERMOTT, D. – GHALLAB, M. – HOWE, A. – KNOBLOCK, C. – RAM, A. – VELOSO, M. – WELD, D. – WILKINS, D. (1998): Pddl – the planning domain definition language. *Annals of Physics* 54 (CVC TR-98-003), 26.

MOURAO, K. – PETRICK, R. P. A. – STEEDMAN, M. (2010): Learning action effects in partially observable domains. In: *Proceedings of the 2010 conference on ECAI 2010: 19th European Conference on Artificial Intelligence*, Amsterdam: IOS Press, 973-974.

NILSSON, N. J. (1982): *Principles of Artificial Intelligence.*

PEDNAULT, E. P. D. (1989): Adl: exploring the middle ground between strips and the situation calculus. In: *Proceedings of the first international conference on Principles of knowledge representation and reasoning*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 324-332.

RUSSELL, S. J. – NORVIG, P. (2003): *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* 2nd edition. Pearson Education.

SLANEY, J. – THIBAUX, S. (2001): Blocks world revisited. *Artificial Intelligence* 125, Nos. 1-2, 119-153.

YANG, Q. – WU, K. – JIANG, Y. (2007): Learning action models from plan examples using weighted max-sat. *Artificial Intelligence* 171, Nos. 2-3, 107-143.

ZETTLEMOYER, L. S. – PASULA, H. M. – KAELBLIN, L. P. (2005): Learning planning rules in noisy stochastic worlds. In: *IN AAAI*. AAAI Press, 911-918.

Organon F 20 (Supplementary Issue 2) 2013: 216-234

From Deduction to Knowledge Representation

MICHAL VINCE

Department of Applied Informatics. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University. Mlynská dolina. 842 48 Bratislava. Slovak Republic
michal.vince@fmph.uniba.sk

JÁN ŠEFRÁNEK

Department of Applied Informatics. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University. Mlynská dolina. 842 48 Bratislava. Slovak Republic
sefranek@fmph.uniba.sk

RECEIVED: 11-12-2012 ▪ ACCEPTED: 02-03-2013

Abstract: In this paper, we discuss why deduction is not sufficient for knowledge representation of programs with commonsense. Requirements of representation of incomplete, evolutive and conflicting knowledge led to a rise of alternative logic formalisms, dubbed nonmonotonic logics. Important features of nonmonotonic logic were discussed on the example of default logic – a role of assumptions in reasoning, use of fixpoint constructions as a formal tool for building a nonmonotonic semantics and, finally, computational aspects of nonmonotonic reasoning. This overview is completed by a presentation of our approach to updates. Updates are closely connected to nonmonotonic reasoning. We construct our approach for assumption based frameworks (and for default theories, as a consequence).

Keywords: Assumption-based framework – commonsense reasoning – default logic – knowledge representation – non-monotonic logic – update.

1. Introduction

The goals of this paper are twofold. First, we are aiming at a description of logical aspects of knowledge representation. Knowledge representation is a field of artificial intelligence, its task is to study and construct languages, formalisms and tools for expressing knowledge of "intelligent" (knowledge-based) programs (agents) and for reasoning with the represented knowledge. Foundational aspects of this task involve

- semantic specification of features of a representational language, appropriate with respect to a represented domain and required reasoning tasks,
- investigation and proposal of syntactic systems and algorithms with good computational properties, obeying semantic specifications.

It is obvious that this task has a relevant logical content. According to our opinion, the core of the knowledge representation research field is logical.

Second, we intend to provide a brief presentation of a topic of our own research – of updates of some nonmonotonic knowledge bases.

We will start from a more general perspective, emphasizing the role of logic in computer science. Mathematical logic became rather one of many mathematical disciplines after the end of a dream about firm logical foundations of mathematics in thirties of the previous century. On the other hand, may be surprisingly, influence of logic on computer science is striking. It is possible to speak about unusual effectiveness of logic for computer science (Halpern et al. 2001). More in Section 2.

Particularly, logic played an important role in the history of artificial intelligence since its beginning until current days. John McCarthy (1959) presented a vision of logic-based intelligent programs already in fifties. More in Section 3. Pioneers of artificial intelligence were aware of close relationships between artificial intelligence and philosophical logic (McCarthy – Hayes 1969).

A primary field of artificial intelligence from the viewpoint of applications of logic is the field of knowledge representation and reasoning (KRR). More importantly, KRR is a field, which motivates an emergence of new logical systems and ways how to do logic (Makinson 2002). Deduction is not a sufficient reasoning mode for tasks inherent in knowledge representation. Representation of incomplete, evolving and conflicting knowledge and reasoning with such knowledge provide new, challenging stimuli for logical research.

The rest of this paper after Section 3 is structured as follows. An overview of default logic is discussed, emphasizing some general features of that logic – use of nonmonotonic assumptions, fixpoint constructions for specifying semantics of nonmonotonic theories and computational aspects of nonmonotonic reasoning. After that, an original approach to updates of some nonmonotonic knowledge bases is presented.

2. Logic and computer science

During the last forty years logic has gained much more influence in computer science than it ever has in mathematics. In fact, concepts and methods of logic seize unmistakable place in computer science, therefore the logic has been called "the calculus of computer science" (Manna – Waldinger 1985).

Halpern et al. (2001) described the status of logic in computer science as follows: "*…logic has turned out to be significantly more effective in computer science than it has been in mathematics. This is quite remarkable, especially since much of the impetus for the development of logic during the past one hundred years came from mathematics.*"

Logic is used as a conceptual apparatus in many fields of computer science, e.g. in complexity theory, relational databases and query languages, programming language research, program specification, program and protocol verification, automated verification of hardware designs, reasoning about knowledge, distributed processes, multi-agent systems, knowledge representation, semantic web.

In the next few paragraphs we will briefly present an example of an effective use of logic in computer science, its use in databases. Relational data model, based on logic, led to a technological turn in database field, even if there was a big distrust against the used logical apparatus.[1] Clear, precise, but intuitive and easy to use relational query languages belong among important contributions of logic for computer science, but also for information technology.

---

[1] Codd, the author of the relational data model, said in his Turing award lecture Codd (1970): "Instead of welcoming a theoretical foundation as providing soundness, the attitude seems to be: if it's theoretical, it cannot be practical." Notice that the title of his article is symptomatic — the logical approach to databases has been not yet generally accepted in the year 1982.

Logic as a database query language. First-order logic (FO) forms the base of several modern database systems, and the standard query languages such as Structured Query Language (SQL) and Query-By-Example (QBE) are syntactic variants of FO. Immermann in Halpern et al. (2001) proposed several reasons why FO has turned out to be so successful as a query language, from which three main reasons are:

- FO has syntactic variants that are used to build practical languages (SQL, QDB),
- FO-based query languages can be efficiently implemented using relational algebra (Codd 1982). The algebra turns out to yield a crucial advantage when large amounts of data are concerned,
- in principle, FO queries can be evaluated in constant time, independent of the database size, when parallelism is available.

We close this section by a non-exhaustive enumeration of logics applied in different fields of computer science. Some of them are new formalisms for computer science goals, but many are "borrowed" from mathematical or philosophical logic, however fragments of those formalisms with better computational properties are sometimes constructed. Our list of logics is as follows: automated deduction, program logics, type theory, domain theory logic, equational logic, term rewriting, formal semantics of programming languages, linear logic, logic programming, constraint logic programming, inductive logic programming, adductive logic programming, epistemic and temporal logics, logics for spatial reasoning, nonmonotonic logics, description logics, logics of hybrid systems.

3. McCarthy's programs with commonsense

In 1950s researchers believed that programs will be able to solve problems using human-like intelligence (Reiter 1980).

In 1959 J. McCarthy proposed the *advice taker* – a program for solving problems by drawing conclusions by reasoning (McCarthy 1959). For this purpose, the *advice taker* should use formal language when manipulating the statements.

With such a design, McCarthy expected the program to be improvable by describing its symbolic environment to it and what is wanted from it.

These statements will not require any knowledge of the program or any a priori knowledge of the advice taker. The user of such a program can assume that he will be given an answer based on logical consequences of anything it was told before.

McCarthy likens this property with human's *commonsense*, as "*it automatically deduces for itself a sufficiently wide class of immediate consequences of anything it is told and what it already knows*".

The *advice taker* has a method for representing expressions (terms) in computer. Certain of these expressions may be regarded as declarative sentences in a certain logical system, others are the names of entities of various kinds (objects, individuals, functions and programs). Also, *immediate deduction routine* is part of the system. The program is intended to operate cyclically, drawing conclusion by the *immediate deduction routine* and obeying conclusions of the imperative form (routine *deduce and obey* may be obeyed too). Although McCarthy did not choose the particular formal system, he suggested that it will have a single rule of inference which will combine substitution for variables with modus ponens. The purpose of this was to avoid choking the machine with special cases of general propositions already deduced.

An airport scenario. To describe *advice taker's* abilities, McCarthy used simple real world problem. In this example, a man is sitting behind the desk in his home and there is a car in his garage. The man lives in a county with an airport. If the man decides to go to the airport the *advice taker* will, collecting right premises and using deduction to draw conclusions, advice the man to walk from the desk to the car and drive the car to the airport.

Bar-Hillel's criticism. The article McCarthy (1959) is published together with a discussion after the presentation of the advice taker. A critique expressed by Bar-Hillel is interesting and significant. His main objection is that deduction is not a proper reasoning mode for formalizing commonsense. The development of the attempts to formalize commonsense reasoning in next decades confirmed Bar-Hillel's objections. His critique considers incredible the machine to conclude proposed goal, i.e., "Walk from your desk to your car!", by sound deduction. Bar-Hillel argues that *such conclusion could not be drawn from the premise in any serious sense,* as there are varieties of other options, e.g., to call a taxi, to cancel a flight, etc. (McCarthy 1959).

To sum up, McCarthy's vision about implementing commonsense reasoning using deduction failed. An appropriate semantic description of commonsense reasoning in terms of deduction is not possible. Moreover, also computational point of view was against deduction. Undecidable and computationally demanding logical deduction has been considered as an inappropriate tool for computational modelling of commonsense reasoning.

4. Nonmonotonic logics

In seventies came McCarthy with a new vision, the vision about understanding commonsense reasoning as jumping to conclusions. A goal was to construct some new logics, logics which, unlike careful and stepwise proceeding deduction, jump to conclusions.

The new slogan about jumping to conclusions aimed to characterize quick and hypothetical reasoning with incomplete knowledge. This type of logics has been dubbed non-monotonic,[2] mainly within artificial intelligence community, or defeasible, mainly within philosophical logic community.

The year 1980 can be considered as a milestone in the development of nonmonotonic logics. A series of seminal papers has been published in a special volume of the *Artificial Intelligence Journal* (we emphasize McCarthy 1980, McDermott – Doyle 1980, Reiter 1977).

Researchers interested in formalizations of commonsense reasoning gained in two decades between McCarthy (1959) and McCarthy (1980) a rich experience. It became clear that attempts to implement commonsense reasoning using deduction from a knowledge base are not feasible. On the other hand, and more importantly, some positive insights have been reached.

Investigations of methods and patterns useful for a formalization of reasoning about actions and for representing relevant knowledge ran into some crucial problems. A cost-saving representation of a domain should not contain axioms about properties, which do not change as a result of a given action. The content of the frame problem is how to propose such

---

[2] If $A \subset B$ are sets of formulae then all consequences of A are not necessarily consequences of B. Commonsense reasoning is nonmonotonic in a sense that consequences drawn from (incomplete) knowledge may be rejected after an addition of new information.

rational representation. A solution is based on an idea of *inertia* – properties of objects are *usually* fixed, *except* some, which are affected by an action. We assume by *default* that actions do not change properties of object. If they are changed, it must be expressed explicitly. This is an intuitive basic idea, but formal solutions need to overcome some subtle problems. Representation of an action usually contains a representation of prerequisites and effects of the action.[3] An attempt to represent both aspects leads to problems closely connected to the frame problem. The content of the qualification problem is how to qualify normal circumstances (prerequisites) of an action. Usually we assume that no exceptional conditions occur, when an action is intended. Similarly, a representation of actions should be focused only on direct effects of an action under normal conditions. A need to abstract from possible indirect effects of actions is the content of the ramification problem.

A necessity to introduce and study ways how to reason about usual, normal, default properties or situations with possible exceptions was recognized also in other areas of reasoning research.

The development and experience briefly described above led to a conviction that another type of logic is needed. The earliest nonmonotonic formalisms, considered as classical, are circumscription (McCarthy 1980), default logic (Reiter 1980) and autoepistemic logic Moore (1985).

Some stimuli for studying nonmonotonic reasoning came also from the database and logic programming fields. Closed world reasoning (Reiter 1977) is appropriate for databases: if a sentence, say A, is not recorded in a database D, it is natural to assume that $\neg A$ holds in D. The same idea is applied in logic programming – according to the principle of negation as failure (Apt – Bol 1994) – *not* A[4] is assumed, if a proof of A fails in a finite time.

A noteworthy amount of research was devoted in eighties by logic programming community to deep semantic investigations of the negation as failure principle (Apt – Bol 1994). A new paradigm of logic programming, answer set programming (ASP) (Marek – Truszczynski 1998, Niemelä 1999), based on stable model and answer set semantics (Gelfond – Lifschitz 1988, 1990) resulted from this research period. Moreover, characterizations

3 Logical representation of actions is in this volume presented in Čertický (2013).

4 Notice that another symbol is used for the negation as failure.

of classical nonmonotonic formalisms in terms of semantics of logic programs has been provided.[5]

A characterization of some crucial features of nonmonotonic reasoning is given below on the example of default logic.

5. Default logic

We are aiming to show three important features of (some) formalizations of nonmonotonic reasoning on the example of default logic:

- the role of nonmonotonic assumptions in reasoning,
- use of fixpoint constructions,
- computational intractability, its causes and its relation to representational compactness.

5.1. Default rules and nonmonotonic assumptions

A default rule is of the form[6]

$$\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$$

where α (called premise), β (justification) and γ (conclusion) are formulae[7] of a logical language L, we will say that the default rule is over L. Usually, a first order language is considered as a general option. Ordinary rules of deductive logic contain premises and conclusions. However, there are fundamental differences. Default rules are not inference rules, they are not structural (they do not specify operations on expressions of some form) and they are domain-dependent.

Let consider an example of a default rule (over a propositional language), a formal treatment of the presumption of innocence.

---

[5] More about logic programing as a computational and conceptual tool for implementing and studying nonmonotonic reasoning can be found in this volume in Šiška – Šimko (2013).

[6] We will use also notation $\alpha : \beta / \gamma$.

[7] Other, more general definitions of a default rule are possible.

$$\frac{accused : \neg proven\_guilty}{innocent}$$

The intuitive idea behind a default rule is that its conclusion (somebody is innocent, in our example) is acceptable, if the prerequisite (she/he is accused) is true and there is no argument against the justification (it is not known that he/she is proven guilty). A default rule represents actually a proposition with a reference to a global context.[8]

As a consequence, a default rule is not applicable locally as usual inference rules. Default rules are context-dependent expressions, their truth/acceptability depends on a given global context. In some contexts justifications are supported, in other they are falsified. Hence, justifications may serve as nonmonotonic assumptions – if a new information is given, previously acceptable assumption may be rejected. Marek and Truszczynski characterize nonmonotonic reasoning as context-dependent reasoning (Marek – Truszczynski 1993).

An important point of view on nonmonotonic reasoning, emphasizing a role of nonmonotonic assumptions, was presented in Bondarenko et al. (1997), where nonmonotonic reasoning is interpreted as a deduction from nonmonotonic assumptions.

5.2. Extension, fixpoint constructions

First we define a default theory as a pair $T = (E, D)$, where E is a set of ordinary formulae of a logical language L and D is a set of default rules over L. Suppose (without loss of generality) that L is a first order language. We denote by Cn_{FOL} the consequence operator of the first-order logic.

The meaning of a default theory is characterized by its extension.

Let X be a set of formulae of L and $\Gamma(X)$ be a minimal (w.r.t. inclusion) set of formulae s.t.

- $E \subseteq \Gamma(X)$,
- $Cn_{FOL}(\Gamma(X)) = \Gamma(X)$,
- if $(\alpha : \beta / \gamma) \in D$, $\alpha \in \Gamma(X)$, $\neg\beta \notin X$, then $\gamma \in \Gamma(X)$.[9]

---

8 Nothing in the relevant context, within the accessible knowledge, supports that she/he is proven guilty.

9 If this condition is satisfied, it is said that $\alpha : \beta / \gamma$ is applicable w.r.t. X.

An extension is a set of formulae $\mathcal{E}$ s.t. $\mathcal{E} = \Gamma(\mathcal{E})$, i.e. an extension is a fixpoint of the operator Γ.

Different default theories may have no extension, exactly one extension or more extensions. The case of more extensions leads to two kinds of (default) reasoning – skeptical and credulous. If a formula holds in each extension of a default theory T, then it is a skeptical consequence of T. If it holds in an extension, then it is its credulous consequence.
A fixpoint as defined above enables to specify a set of formulae $\mathcal{E}$, which is

- supported, i.e., each formula of $\mathcal{E}$ is either a member of E or a consequence of an applicable default rule or a deductive consequence of them,
- saturated, i.e., all members of E, all consequences of applicable default rules and deductive consequences of both classes of formulae are contained in $\mathcal{E}$,
- coherent, i.e., no default rule with a justification denied by $\mathcal{E}$ is applicable.

The fixpoint construction used in the definition of extension is a typical conceptual tool used in formalizations of nonmonotonic reasoning and it enables to specify coherent, supported and saturated sets of formulae.

5.3. Default logic – computational aspects

Some negative results concerning computational aspects of default logic are presented in this subsection. Generally, nonmonotonic formalisms did not satisfy original expectations about efficient computations, about "jumping to conclusions".

First order language. Let denote the premise of a default rule d as $pre(d)$ and its justification as $just(d)$. Then $d \in D$ is applicable w.r.t. an extension $\mathcal{E}$ iff $\mathcal{E} \models pre(d)$ and $\mathcal{E} \not\models \neg just(d)$.

The relation $\models$ is not recursive, it is recursively enumerable, hence $\not\models$ is not recursively enumerable and the decision problem whether $\mathcal{E}$ is an extension of a default theory is not semi decidable.

Propositional language. The following basic types of problems are usually considered in investigations of computational complexity of propositional default theories.

Given is a propositional formula ϕ and a default theory $T = (E, D)$.

Q1: does ϕ belong to each extension of T?

Q2: does ϕ belong to some extension of T?

Q3: is $\mathcal{E}$ an extension of T?

The problems are more hard than NP-complete, they are complete on the second level of polynomial hierarchy (Gottlob 1995).

At first glance it seems that the computational complexity of default reasoning is caused by a need to test entailment or satisfiability.

More about causes of intractability. Kautz and Selman (1991) posed a question whether the computational complexity of problems connected to default logic is really caused (only) by satisfiability (entailment) testing.

They studied only simple disjunction-free propositional languages with default rules of the form $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k : b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \wedge c_1 \wedge \ldots \wedge c_n / b_1 \wedge \ldots \wedge b_m$ and a hierarchy of even more simple disjunction-free default theories up to default theories with default rules of the form $p : q/q$ and $p : \neg q/\neg q$. Membership in a set is tested in those theories instead of testing satisfiability / consequence.

Results reached by Kautz and Selman were pessimistic also for those simple default theories. Kautz and Selman analyze causes of those results as follows:

- there are conflicts between default rules and incoherent cycles,
- there is an exponential number of extensions in the worst case.

The causes mentioned above may be illustrated by this example: Let E be empty and D $= \{: \neg b_1/a_1, : \neg a_1/b_1, \ldots, : \neg b_n/a_n, : \neg a_n/b_n\}$.

Conflicts and incoherent cycles can be detected for each pair of rules $: \neg b_i/a_i$ and $: \neg a_i/b_i$. Each extension contains exactly n atoms – one from each pair a_i, b_i, it means there are 2^n extensions of this default theory.

Is intractability of nonmonotonic reasoning a real drawback? The title of this paragraph is identical with the title of a paper by Cadoli, Donini and Schaerf (1996). They studied some nonmonotonic formalisms, in which inference is not computable in polynomial time. They investigated compilations of a given nonmonotonic formalism into another formalism. The idea of this investigation is as follows. A formalism and a reasoning problem, which is not solvable in polynomial time, is given. The goal is to study, whether it is possible to translate (compile) the problem into other formalism, where the problem is solvable in polynomial time. The time, required for the compilation, may be arbitrary. The result of their investigations was that for many formalisms and problems the compilation requires exponentially bigger space.

Their interpretation of this class of results is that nonmonotonic formalisms enable extremely compact representation of propositional knowledge. Thus, computational intractability is a price for having a compact representation.

6. Updates

Nonmonotonic reasoning is closely related to belief change. If a new formula is believed (inserted into a knowledge base) then the nonmonotony of the corresponding consequence relation may lead to a rejection of some beliefs (formulae from the set of consequences of the original knowledge base). A process started by insertion, acceptance of some new propositions and by subsequent solving some conflicts, by a rejection of some propositions is called an update.

Updates of nonmonotonic knowledge bases (sets of formulae with a nonmonotonic consequence operator) are analyzed in this section. A role of nonmonotonic assumptions determine some special features of updates of nonmonotonic knowledge bases, as we will see below.

An original result is presented in this section. Our goal is to continue with focusing on default theories and to investigate updates of default theories. According to our best knowledge there is no paper devoted to this topic. On the other hand, updates of logic programs were studied intensively in the last fifteen years. We will generalize our semantics of logic program updates (Šefránek 2011) to updates of assumption based frameworks (ABF) (Bondarenko et al. 1997). Updates of a specialization of ABF for logic programs were studied in (Šefránek 2012), but here updates of abstract, general ABF are studied directly (according to our best knowledge, no research was devoted to updates of ABF). Updates of ABF may be transferred to updates of default theories – an ABF view on default theories was presented in (Bondarenko et al. 1997).

We begin with a description of a problem with logic program updates and a proposal of its solution using a principle of inertia of the current state. The problem occurs within all semantics, based on a causal rejection principle. We omit here technicalities connected to approaches based on the causal rejection principle (see, e.g., Leite 2003, Homola 2004). Only a discussion of an example will serve as a starting point for a sketchy presentation of the main idea of our approach.

Consider the following example, where P is an original program and U is an updating program.

Example 1 $$P = \{a \leftarrow; b \leftarrow a\}$$
$$U = \{\neg a \leftarrow not\ b\}$$

We get two distinguished models (dynamic stable models) of this update according to an arbitrary semantics, based on the causal rejection principle: $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{\neg a\}$.

The first one complies with natural intuitions – S_1 *is a natural description of the world, given by P. U is vacuously true in* S_1*, because not b is false in* S_1*, hence nothing is supported by U w.r.t.* S_1*, i.e. w.r.t. the current state of affairs.*

On the other hand, S_2 *is counterintuitive. The rule* $\neg a \leftarrow not\ b$ *does not change the description of the world given by P. The consequence* $\neg a$ *could be accepted only if there is no evidence that b holds (if there is no such evidence, the assumption not b is justified). However, b holds according to P.*

The acceptance of S_2 *is the result of a too free selection of interpretations checked by a fixpoint condition used in definitions of dynamic semantics of logic program updates. Without going into details: let an operator* Φ *defined on interpretations is given. If* Φ *is applied to* S_2*, the fact* $a \leftarrow$ *of P is rejected because of preference of new information of U and because not b is satisfied in* S_2*. Hence, the residue of* $P \cup U$ *is* $\{b \leftarrow a, \neg a \leftarrow not\ b\}$ *and for an appropriately defined operator* Φ *holds* $\Phi(S_2) = S_2$.

According to our view, a selection of a candidate for a semantic characterization of updates should be somehow restricted. The main idea is that we do not accept unjustified assumptions. In the example above S_1 *was supported by an empty set of assumptions and* S_2 *by the set* $\{not\ b\}$*, which is a superset of the empty set. A kind of Occam's razor is used: a minimization of non-monotonic assumptions. We prefer the empty set of assumptions over the set* $\{not\ b\}$ *in the presented example. The empty set of assumptions is sufficient for a semantic characterization of the current state, hence we respect an inertia of the current state. A principle of inertia of the current state was introduced in (Šefránek 2011; 2012). The principle serves as a solution of a problem of irrelevant updates (Šefránek 2006). The example presented above represents an irrelevant update.*

We will start with a slightly modified version of ABF in the next subsection. Then dynamic assumption based framework, a specification of updates of ABF, is introduced. Finally, the construction is applied to updates of default theories.

6.1. Assumption based framework

Assumption based framework is constructed over a deductive system. A deductive system is a pair (L, R), where

- L is a language, i.e., a countable set of sentences (formulae),
- R is a set of rules of the form

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\gamma}$$

where $\alpha_i, \gamma \in L$, $n \geq 0$. We suppose that for each formula $f \in L$ is defined its negation $\neg f$, however no special properties of a negation operator are supposed on this abstract level.

An assumption based framework is a quadruple (L, R, A, c), where $A \subset L$ is a set of assumptions and c is a mapping defined for each assumption s.t. $c(a) \in L$ is called contrary of a. Negation $\neg$ and c may be different.

We illustrate the notion of ABF on the example of default logic. Suppose a default theory (E, D) and a deductive system (L_0, R_0) of first order logic. A default rule

$$\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$$

can be rewritten as

$$\frac{\alpha, M\beta}{\gamma}$$

hence, default rules have the same form as rules of a deductive system. Thus, we define $L = L_0 \cup \{M\beta \mid \beta \in L_0\}$, $R = R_0 \cup D$, the set of assumptions A contains all $M\beta$ s.t. $M\beta$ occurs in a default rule. Finally, $c(M\beta) = \neg\beta$.

It was shown in Bondarenko et al. (1997) that default theories, logic programs and also other nonmonotonic formalisms may be understood and presented as assumption based frameworks and nonmonotonic reasoning within those formalisms as a deduction from nonmonotonic assumptions. Similarly, nonmonotonic assumptions play a key role in our approach to updates of nonmonotonic theories (nonmonotonic knowledge bases).

We are returning back to a general ABF. A proof of a formula f of L is a sequence $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, where f_1 is a set S of assumptions, each f_j where $j > 1$, is a consequence of a rule $r \in R$, premises of r are previous members of the sequence and $f_n = f$,[10] notation $S \vdash f$.

It is clear that in an ABF corresponding to a default theory holds $S \vdash M\beta$ iff $M\beta \in S$. In general, if for each set of assumptions S in an ABF holds that $S = \{a \in A \mid S \vdash a\}$, S is called closed. We consider only closed ABF in this paper.

A set of assumptions $S_1 \subseteq A$ undercuts in an ABF a set of assumptions $S_2 \subseteq A$, if for some $a \in S_2$ holds that $S_1 \vdash c(a)$.

S_1 rebuts in an ABF S_2, if $S_1 \vdash f$ and $S_2 \vdash \neg f$. If $\neg\neg f \equiv f$ in L then rebutting relation is symmetric.

S_1 attacks S_2 in an ABF iff it undercuts or rebuts it in the ABF.[11] We can introduce attacks of an assumption against a set of assumptions, of a set of assumptions against an assumption and between assumptions by identifying a singleton set of assumptions with an assumption.

Argumentation semantics, originally defined in Dung (1995) were applied to ABF in Bondarenko et al. (1997).

We define some argumentation semantics in the following paragraphs.

A set of assumptions is conflict-free in an ABF iff it does not attack itself in the ABF.

A conflict-free set of assumptions S is admissible in an ABF iff for each $a \in A$ holds that if a attacks S in the ABF then S attacks a in the ABF.

A conflict-free set of assumptions S is stable in an ABF iff it attacks each $a \in A \setminus S$ in the ABF.

6.2. Dynamic assumption based framework

A dynamic ABF is a pair of ABFs $\mathcal{A}_1 = (L, R_1, A_1, c)$ and $\mathcal{A}_2 = (L, R_2, A_2, c)$. $\mathcal{A}_1$ is an original ABF and $\mathcal{A}_2$ is an updating ABF. The pair represents an update operation. The updating ABF is more preferred than

---

[10] Notice that a rule may have 0 premises. As a consequence, we consider proofs from a set S of assumptions instead of a proof from $S \cup T$, where $T \subseteq L$ is a theory.

[11] Our attack relation differs from the attack relation of Bondarenko et al. (1997). Use of undercutting in this paper is forced by distinguishing $\neg$ and c.

the original ABF. Proof and the relation $\vdash$ are defined as before, the only difference is that rules from $R_1 \cup R_2$ are taken into account. We will sometimes use notation $\vdash_{R_1 \cup R_2}$ or a similar one, with an index denoting the set of used rules.

Conflicts solving and the inertia of the current state. We recognize two kinds of conflicts, corresponding to undercutting and rebutting.

Definition 1. *Let Δ be a set of assumptions. It is said that Δ contains a conflict w.r.t. a set of rules R iff*

- $\Delta \vdash_R f$, $\Delta \vdash_R \neg f$ *for some* $f \in L$,
- $a \in \Delta$ *and* $\Delta \vdash_R c(a)$.

Definition 2. *A* solution *of a conflict C contained in a set of assumptions Δ w.r.t. $R_1 \cup R_2$ is a minimal set of rules R s.t. Δ does not contain C w.r.t. $(R_1 \cup R_2) \setminus R$.*

A solution of all *conflicts contained in Δ w.r.t. $R_1 \cup R_2$ is a minimal set of rules R s.t. Δ contain no conflict w.r.t. $(R_1 \cup R_2) \setminus R$.*

Notice that also $\emptyset$ may be a solution of all conflicts.

Consequence 1. *Assume that an ABF $(L, R_1 \cup R_2, A_1 \cup A_2, c)$ is given. Let R be a solution of all conflicts in Δ w.r.t. $R_1 \cup R_2$.*

Then Δ is *conflict free in he ABF $(L, R, A_1 \cup A_2, c)$.*

Thus, conflict-free sets of assumptions are results of conflicts solving. However, simple solving of conflicts is not sufficient for a specification of updating. First, a preference of more recent updating ABF over the original ABF should be respected. We will define preferential conflict solving. Second, irrelevant updates, i.e., updates, which are not applicable to the current state of affairs should be ignored.

Let proceed to the preferential conflict solving. The preference of R_2 means that, if it is possible to solve a conflict by rejecting a rule from R_1 or by rejecting a rule from R_2, we prefer the first option. More formally:

Consider two rules r_1, $r_2 \in R_1 \cup R_2$. We say that r_2 is more preferred than r_1 iff $r_2 \in R_2$ and $r_1 \in R_1$ (notation: $r_1 \prec r_2$).

Definition 3. *Suppose that Q_1, $Q_2 \subseteq R_1 \cup R_2$.*

If $\exists r_1 \in Q_1 \setminus Q_2\ \exists r_2 \in Q_2 \setminus Q_1\ r_2 \prec r_1$ and $\neg(\exists r_3 \in Q_2 \setminus Q_1\ \exists r_4 \in Q_1 \setminus Q_2\ r_4 \prec r_3)$ then Q_1 is more preferred than Q_2.

Definition 4. *Let Q be a solution of all conflicts in Δ w.r.t. $R_1 \cup R_2$.*

Q is called a preferred solution if there is no set of rules $R \subseteq R_1 \cup R_2$ s.t. R is more preferred than Q and R is also a solution of all conflicts in Δ w.r.t. $R_1 \cup R_2$.

Conflict solving, based on a preference relation, is not sufficient for an intuitively satisfactory specification of update, remind Example 1. Our analysis of that example aimed to show that it is not reasonable to solve conflicts for an arbitrary set of assumptions. More specifically, it is not reasonable to accept more assumptions than is necessary w.r.t a given description of the current state.

Definition 5. *Let $(\mathcal{A}_1 = (L, R_1, A_1, c),\ \mathcal{A}_2 = (L, R_2, A_2, c))$ be a DABF and $\Delta \subset \Omega \subseteq A_1 \cup A_2$ be sets of assumptions.*

It is said that Δ defeats Ω, if Δ attacks Ω in $(L, R_1 \cup R_2, A_1 \cup A_2, c)$.

Suppose that Q_1, Q_2 are preferred solutions of all conflicts in Δ and Ω, respectively, w.r.t. $R_1 \cup R_2$.

Suppose that Ω is defeated by Δ and both are stable sets of assumptions w.r.t. subsets Q_1, Q_2 of $R_1 \cup R_2$, respectively.

Then the set $\{f \mid \Omega \vdash_{Q_1} f\}$ is an irrelevant update of $\mathcal{A}_1$ by $\mathcal{A}_2$.

Let Q_2 be a preferred solution of all conflicts in Δ w.r.t. $R_1 \cup R_2$. Then the set $S = \{f \mid \Delta \vdash_{Q_2} f\}$ is a stable update of $\mathcal{A}_1$ by $\mathcal{A}_2$ iff it is not an irrelevant update of $\mathcal{A}_1$ by $\mathcal{A}_2$.

Suppose that Δ is a stable set of assumptions w.r.t. ABF (L, R_1, A_1, c) and also w.r.t. $(L, R_1 \cup R_2, A_1 \cup A_2, c)$. If the set $\{f \mid \Omega \vdash_Q f\}$ is for each Ω s.t. $\Delta \subset \Omega$ and for each $Q \subset R_1 \cup R_2$ an irrelevant update of $\mathcal{A}_1$ by $\mathcal{A}_2$ then we can speak about an inertia of the current state (specified by Δ).

Finally, we notice that the presented approach to updates of ABF can be applied to updates of default theories. It was shown in Bondarenko et al. (1997) that default theories are a special case of ABF.

7. Conclusions

A view on some important features of logical aspects of knowledge representation is presented in the first part of this paper. Formalizations of reasoning with incomplete, dynamic and conflicting knowledge represent a challenge for logicians. We mention here the role of nonmonotonic assumptions in that kind of reasoning.

Our original result is presented in the second part of the paper. This part is connected to the first part by emphasizing nonmonotonic assumptions while specifying update of nonmonotonic knowledge bases. Key idea of our approach is a minimization of nonmonotonic assumptions and, consequently, a principle of inertia of the current state.

As regards open problems and future research, we will devote our attention to more detailed investigations of properties of the presented approach and for extension of that approach to admissible and complete extensions. We suppose that the principle of inertia of the current state is applicable to complete extensions, but not to admissible extensions.

References

APT, K. R. – BOL, R. (1994): Logic programming and negation: A survey. *Journal of Logic Programming* 19, 9-71.

BONDARENKO, A. – DUNG, Phan Minh – KOWALSKI, R. A. – TONI, F. (1997): An abstract, argumentation-theoretic approach to default reasoning. *Artif. Intell.* 93, 63-101.

CADOLI, M. – DONINI, F. M. – SCHAERF, M. (1996): Is intractability of nonmonotonic reasoning a real drawback? *Artif. Intell.* 88, Nos. 1-2, 215-251.

CODD, E. F. (1970): A relational model of data for large shared data banks. *Communications of the ACM* 13, No. 6, 377-387.

CODD, E. F. (1982): Relational database: A practical foundation for productivity. *Commun. ACM* 25, No. 2, 109-117.

ČERTICKÝ, M. (2013): Action models and their induction. *Organon F* 20, supplementary issue 2, 206-215.

DUNG, Phan Minh (1995): On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artif. Intell.* 77, No. 2, 321-358.

GELFOND, M. – LIFSCHITZ, V. (1988): The stable model semantics for logic programming. In: *ICLP/SLP*, 1070-1080.

GELFOND, M. – LIFSCHITZ, V. (1990): Logic programs with classical negation. In: *ICLP*, 579-597.

GOTTLOB, G. (1995): The complexity of default reasoning under the stationary fixed point semantics. *Inf. Comput.* 121, No. 1, 81-92.

HALPERN, J. Y. – HARPER, R. – IMMERMAN, N. – KOLAITIS, P. G. – VARDI, M. Y. – VIANU, V. (2001): On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science. *The Bulletin of Symbolic Logic* 7, No. 2, 213.

HOMOLA, M. (2004): Dynamic logic programming: Various semantics are equal on acyclic programs. In: Leite, J. A. – Torroni, P. (eds.): *CLIMA, Computational Logic* *in Multi-Agent Systems, 5th International Workshop, CLIMA V, Lisbon, Portugal, September 29-30, 2004*, 78-95.

KAUTZ, H. A. – SELMAN, B. (1991): Hard problems for simple default logics. *Artif. Intell.* 49, Nos. 1-3, 243-279.

LEITE, J. (2003): *Evolving Knowledge Bases: Specification and Semantics.* IOS Press.

MAKINSON, D. (2002): Ways of doing logic: what was different about agm 1985? *Journal of Logic and Computation* 12.

MANNA, Z. – WALDINGER, R. (1985): *The Logical Basis for Computer Programming, Vol. 1: Deductive Reasoning.* Addison-Wesley Professional.

MAREK, V. W. – TRUSZCZYNSKI, M. (1993): *Nonmonotonic Logic – Context-Dependent Reasoning.* Artificial intelligence. Springer.

MAREK, V. W. – TRUSZCZYNSKI, M. (1998): Stable models and an alternative logic programming paradigm. *CoRR,* cs.L0/9809032.

MCCARTHY, J. (1959): Programs with common sense. In: *Proceedings of the Symposium on the Mechanization of Thought Processes.* Teddington, England: National Physiology Lab, 1-15.

MCCARTHY, J. (1980): Circumscription, a form of non monotonic reasoning. *Artificial Intelligence* 13, 27-39.

MCCARTHY, J. – HAYES, P. J. (1969): Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence. In: *Machine Intelligence*. Edinburgh University Press, 463-502.

MCDERMOTT, D. – DOYLE, J. (1980): Non-monotonic logic I. *Artificial Intelligence* 13, 41-72.

MOORE, R. C. (1985): Semantical considerations on nonmonotonic logic. *Artif. Intell.* 25, No. 1, 75-94.

TURING, A. M. (1950): Computing machinery and intelligence. *Mind* LIX, No. 236, 433-460.

NIEMELÄ, I. (1999): Logic programs with stable model semantics as a constraint programming paradigm. *Ann. Math. Artif. Intell.* 25, Nos. 3-4, 241-273.

REITER, R. (1977): On closed world data bases. In: *Logic and Data Bases*, 55-76.

REITER, R. (1980): A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence* 13, 81-132.

ŠEFRÁNEK, J. (2006): Irrelevant updates and nonmonotonic assumptions. In: *Proceedings of the 10th European conference on Logics in Artificial Intelligence,* JELIA'06. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 426-438.

ŠEFRÁNEK, J. (2011): Static and dynamic semantics. Preliminary report. In: *MI- CAI 2011, Special Session, Mexican International Conference on Artificial Intelligence*.

ŠEFRÁNEK, J. (2012): Updates of argumentation frameworks. In: Rosati, R. – Woltran, S. (eds.): *Proceedings of the 14th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning.* Rome.

ŠIMKO, A. – ŠIŠKA, J. (2013): Logic programming and interactive applications. *Organon F* 20, supplementary issue 2, 187-205.